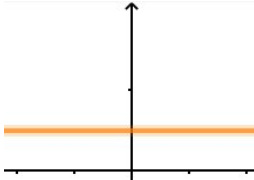
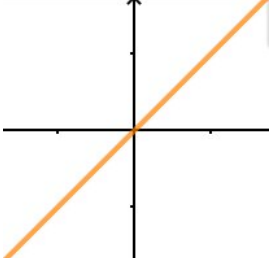
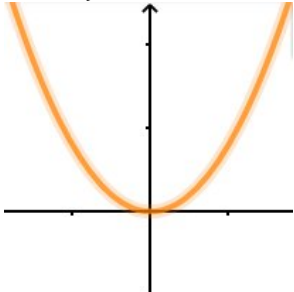
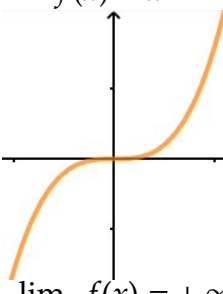
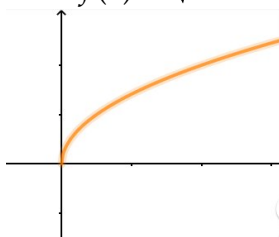
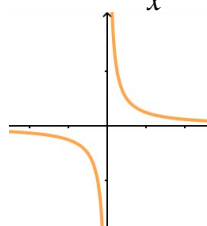
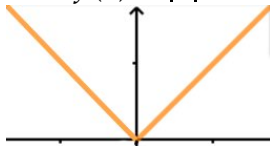
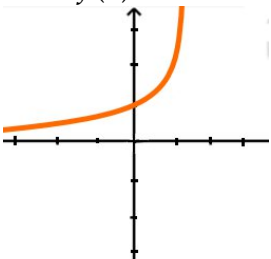
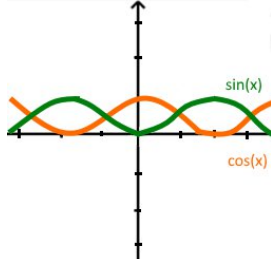


Annexe A2 : Fonctions usuelles

1 - Limites des fonctions de références

Fonction constante $f(x) = k$ (où k est un réel)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$	Fonction identité $f(x) = x$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	Fonction carré $f(x) = x^2$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
Fonction cube $f(x) = x^3$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
Fonction valeur absolue $f(x) = x$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	Fonction exponentielle $f(x) = e^x$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	Fonctions cosinus et sinus $f(x) = \cos x$ ou $f(x) = \sin x$  Pas de limite en $+\infty$ Pas de limite en $-\infty$

Remarques :

- Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ (n entier, $n \geq 1$) ont les mêmes limites en $\pm \infty$ que la fonction carré si n est **pair**, que la fonction cube si n est **impair**.
- L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction inverse (en $+\infty$ et en $-\infty$) et à celle de la fonction exponentielle (en $-\infty$). L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de la fonction inverse en 0.

2 - Démonstration : croissances comparées

Théorème : Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Étape 1 : Montrons que pour tout réel $x \geq 0$, $e^x > x$.

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x$.

Elle est dérivable et $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$ car $e^x \geq e^0 = 1$ pour $x \geq 0$.

Donc g est croissante sur $[0; +\infty[$:

pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 1 > 0$, c'est-à-dire $e^x > x$.

Étape 2 : Limite en $+\infty$. Soit $n \geq 1$ un entier et $x > 0$.

D'après l'étape 1 appliquée au réel $\frac{x}{n+1}$: $e^{\frac{x}{n+1}} > \frac{x}{n+1} > 0$.

La fonction $t \mapsto t^{n+1}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} >$

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ soit } e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

En divisant par $x^n > 0$: $\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Étape 3 : Limite en $-\infty$. On pose $X = -x$, de sorte que $X \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

$$x^n e^x = (-X)^n e^{-X} = (-1)^n \times \frac{X^n}{e^X}.$$

D'après l'étape 2, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^n}{e^X} = 0$.

Par composition et produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$. □

Remarque : Le graphique ci-dessus illustre le résultat : la courbe de $x \mapsto x^3$ passe au-dessus de celle de l'exponentielle pour x entre 1,9 et 4,5 environ, mais l'exponentielle finit par dépasser définitivement toute fonction puissance.

