

Vecteurs – Corrigé – Vecteurs colinéaires

1 (Vecteurs colinéaires 1)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou tel que $\vec{u} = k\vec{v}$)

- Oui car $\vec{v} = -2\vec{u}$
- Oui car $\vec{u} = \frac{1}{6}\vec{v}$
- Oui car $\vec{u} = -4\vec{v}$
- Non car $2 \times 1 = 2$ et $5 \times 2 \neq 9$

2 (Vecteurs colinéaires 2)

- $$4\vec{AD} - 4\vec{BD} + 2\vec{CD} = \vec{0}$$

$$4\vec{AD} - 4(\vec{BA} + \vec{AD}) + 2\vec{CD} = \vec{0}$$

$$4\vec{AD} - 4\vec{BA} - 4\vec{AD} + 2\vec{CD} = \vec{0}$$

$$4\vec{AB} + 2\vec{CD} = \vec{0}$$

$$4\vec{AB} = -2\vec{CD}$$

$$\vec{AB} = -\frac{2}{4}\vec{CD} = -\frac{1}{2}\vec{CD}$$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.
- $$\vec{CB} - 2\vec{AC} + \vec{DB} = \vec{0}$$

$$\vec{CB} - 2(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{0}$$

$$2\vec{CB} - 2\vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{DC} = \vec{0}$$

$$\vec{DC} = 2\vec{AB}$$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.
- $$5\vec{AB} - 3\vec{CB} = 7\vec{AD} - 4\vec{AC}$$

$$5\vec{AB} - 3(\vec{CA} + \vec{AB}) = 7(\vec{AC} + \vec{CD}) - 4\vec{AC}$$

$$5\vec{AB} - 3\vec{CA} - 3\vec{AB} = 7\vec{AC} + 7\vec{CD} - 4\vec{AC}$$

$$8\vec{AB} = 7\vec{AC} + 7\vec{CD} - 4\vec{AC} + 3\vec{CA}$$

$$8\vec{AB} = 7\vec{AC} + 7\vec{CD} - 4\vec{AC} - 3\vec{AC}$$

$$8\vec{AB} = 7\vec{CD}$$

$$\vec{AB} = \frac{7}{8}\vec{CD}$$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

3 (Algorithme)

Variables :

$x_A, x_B, x_C, y_B, y_C, x_D, y_D$:
type nombre.
 a, b, c, d : type nombre.

Initialisations :

Saisir $x_A, x_B, x_C, y_B, y_C, x_D, y_D$

Traitement :

Affecter à a la valeur $x_B - x_A$.
Affecter à b la valeur $y_B - y_A$.
Affecter à c la valeur $x_D - x_C$.
Affecter à d la valeur $y_D - y_C$.

Si $a \times d = b \times c$ alors
 Afficher $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires
 sinon
 Afficher $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires
Fin Si

2) On précise la valeur de chaque variable.

- $A(-1; 1), B(2; 5), C(1; 4)$ et $D(-5; -4)$
 $a = 2 - (-1) = 3$
 $b = 5 - 1 = 4$
 $c = -5 - 1 = -6$
 $d = -4 - 4 = -8$
 $ad = -24 = bc$

« $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires. »
- $A(-2; 0), B(0; 5), C(3; 7)$ et $D(-2; 3)$
 $a = 0 - (-2) = 2$
 $b = 5 - 0 = 5$
 $c = -2 - 3 = -5$
 $d = 3 - 7 = -4$
 $ad = -8$ et $bc = -25$

donc $ad \neq bc$
 « $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires. »

3) Programme ce programme en Python.

```
from math import*

xA=float(input("Entrer xA"))
yA=float(input("Entrer yA"))
xB=float(input("Entrer xB"))
yB=float(input("Entrer yB"))
xC=float(input("Entrer xC"))
yC=float(input("Entrer yC"))
xD=float(input("Entrer xD"))
yD=float(input("Entrer yD"))

a=xB-xA
b=yB-yA
c=xD-xC
d=yD-yC

if a*d==b*c:
    print("Les vecteurs AB et CD sont colinéaires")
else:
    print("Les vecteurs AB et CD ne sont pas colinéaires")
```

4 (Point quelconque)

On considère les points $A(2; 3)$ et $B(4; 1)$.
Soit $M(x; y)$ un point quelconque.

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AB} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}; \vec{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \times (-2) - (-2) \times (y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x-2) + 2(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 4 + 2y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y = 2$$

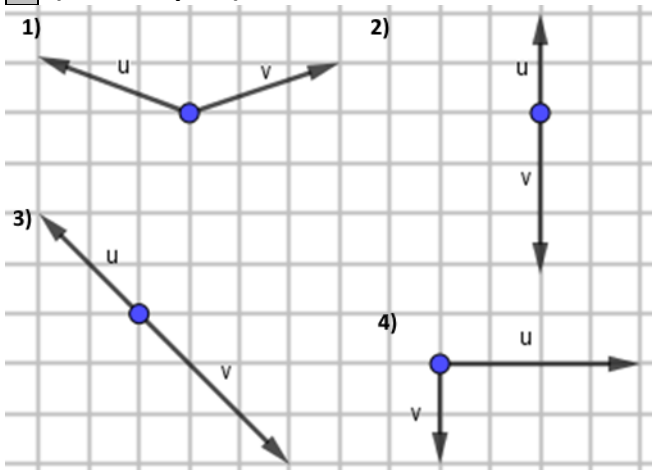
$$\Leftrightarrow -x + y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1$$

Conclusion : $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires si et seulement si le point M s'écrit sous la forme $M(x; x+1)$



5 (Base du plan)



Les couples de vecteurs $(\vec{u}; \vec{v})$ forment une base vectorielle du plan s'ils ne sont pas dans la même direction, c'est-à-dire s'ils ne sont pas colinéaires, donc si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$.

$$1) \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 1 - 3 \times 1 = -6.$$

Donc $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base du plan.

$$2) \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \times 0 - 2 \times 0 = 0.$$

Donc $(\vec{u}; \vec{v})$ n'est pas une base du plan.

$$3) \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

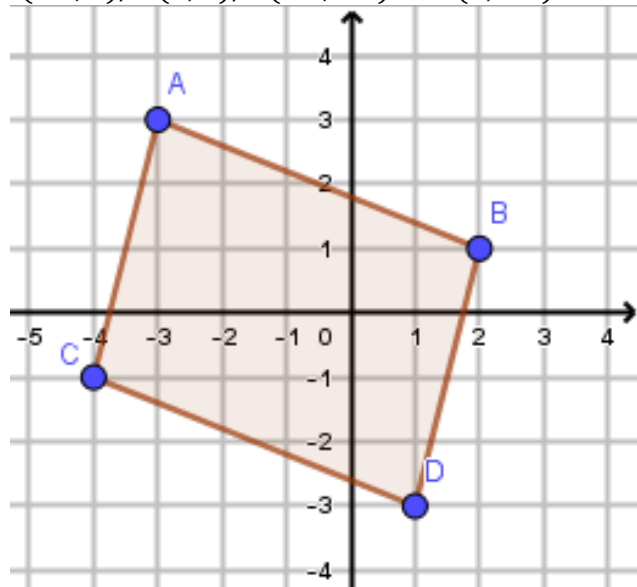
Donc $(\vec{u}; \vec{v})$ n'est pas une base du plan.

$$4) \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 0 = -8.$$

Donc $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base du plan.

6 (Parallélogramme)

Dans un repère $(O; I; J)$ on considère les points $A(-3; 3)$, $B(2; 1)$, $C(-4; -1)$ et $D(1; -3)$



$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1-(-4) \\ -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Donc $ABDC$ est un parallélogramme

2) Calculer l'aire de ce parallélogramme

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4-(-3) \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 2 = -22$$

$$\mathcal{A}_{ABDC} = |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = |-22| = 22 \text{ u. a.}$$

3) Calculer le périmètre de ce parallélogramme

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$\mathcal{P}_{ABDC} = 2AB + 2AC = 2\sqrt{29} + 2\sqrt{17} \approx 19$$

