

# Chap G1 : Théorème de Pythagore

## 1 – La racine carrée

**Définition 1 :** La **racine carrée**  $\sqrt{\quad}$  est l'opération « inverse » du carré, dans les nombres positifs.

**Rappel :** Le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même :  $x^2 = x \times x$

**Exemple 1 :** Les carrés « parfaits »

|                                                                                                                                                           |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">2</div> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | 11  | 12  |
|                                                                                                                                                           | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 |

√

•  $5^2 = 25$  donc  $\sqrt{25} = 5$

•  $12^2 = 144$  donc  $\sqrt{144} = 12$

**Remarque :** La plupart des racines carrées sont des nombres irrationnels comme  $\pi$  : Il y a une infinité de chiffres après la virgule sans répétition d'une même suite de décimales.

On peut en donner une valeur approchée à la calculatrice avec les touches seconde +  $x^2$

**Exemple 2 :** Donner une valeur approchée à 0.01 près des racines carrées suivantes :

$\sqrt{2} \approx 1.41$

$\sqrt{3} \approx 1.73$

$\sqrt{5} \approx 2.24$

$\sqrt{10} \approx 3.16$

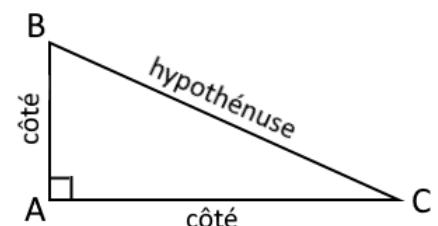
**Remarque :** La racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie.

## 2 – Théorème de Pythagore

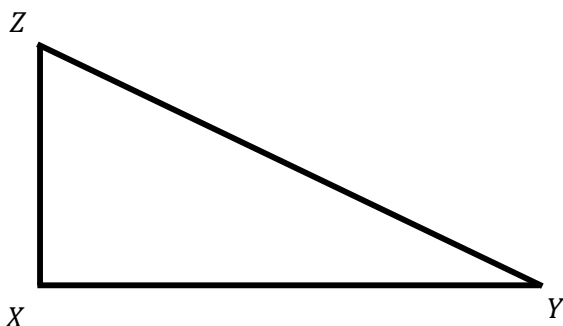
**Propriété 1 (Théorème de Pythagore) :**

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Si  $ABC$  est rectangle en  $A$  alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .



**Exemple 3 :** Dessiner un triangle rectangle puis vérifier le théorème de Pythagore.



- Hypothénuse :  $YZ \approx 7.3 \text{ cm}$
- Côtés :  $XY \approx 6.6 \text{ cm}$  et  $XZ \approx 3.2 \text{ cm}$
- Théorème de Pythagore :
  - . Triangle rectangle en  $X$
  - .  $7.3^2 \approx 53.3$
  - .  $6.6^2 + 3.2^2 \approx 53.8$

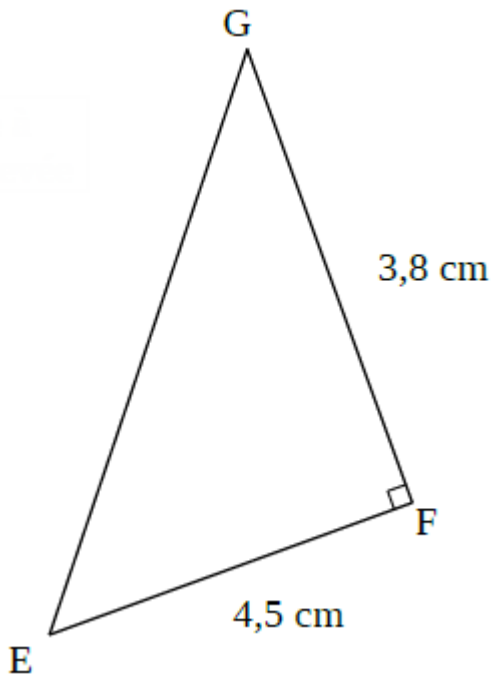
**Remarque :** La légère différence est dû à l'imprécision des mesures et aux arrondis effectués.



Remarque : Le théorème de Pythagore permet de calculer des longueurs dans un triangle rectangle. On peut utiliser la méthode expliquée ci-dessous comme modèle de rédaction.

Exemple 4 : On considère le rectangle  $EFG$  rectangle en  $F$  tel que  $EF = 4,5 \text{ cm}$  et  $FG = 3,8 \text{ cm}$ . Calculer la longueur  $EG$  arrondie au dixième près.

On réalise un dessin à main levée.



Rédaction :

Le triangle  $EFG$  est rectangle en  $F$ .

L'hypothénuse est  $EG$

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$EG^2 = 4.5^2 + 3.8^2$$

$$EG^2 = 14.44 + 20.25$$

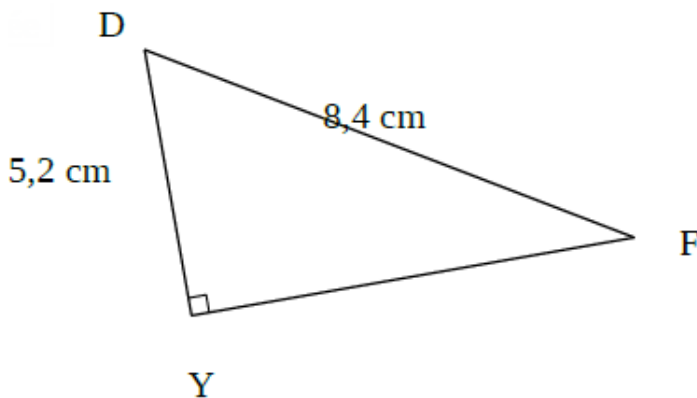
$$EG^2 = 34.69$$

$$\text{Donc } EG = \sqrt{34.69} \approx 5.9$$

La longueur de  $EG$  est d'environ  $5.9 \text{ cm}$ .

Exemple 5 : On considère le triangle  $DYF$  rectangle en  $Y$  tel que  $DY = 5,2 \text{ cm}$  et  $DF = 8,4 \text{ cm}$ . Calculer la longueur  $YF$  arrondie au dixième.

On réalise un dessin à main levée.



Rédaction :

Le triangle  $DYF$  est rectangle en  $Y$ .

L'hypothénuse est  $DF$

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$DF^2 = DY^2 + YF^2$$

$$DF^2 = DY^2 + YF^2$$

$$8.4^2 = 5.2^2 + YF^2$$

$$YF^2 = 8.4^2 - 5.2^2$$

$$YF^2 = 70.56 - 27.04$$

$$YF^2 = 43.52$$

$$\text{Donc } YF = \sqrt{43.52} \approx 6.6$$

La longueur de  $YF$  est d'environ  $6.6 \text{ cm}$ .



### 3 – Réciproque du théorème

#### Propriété 2 : (Réciproque du théorème de Pythagore)

Dans un triangle, si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.

Remarque : On ne peut écrire l'égalité de Pythagore que si elle est vraie. Pour le vérifier on doit calculer **séparément** les deux parties de l'égalité.

Exemple 6 : On considère le triangle  $ABC$  tel que  $AB = 3.6 \text{ cm}$  ;  $BC = 4.8 \text{ cm}$  et  $AC = 6 \text{ cm}$ .  $ABC$  est-il un triangle rectangle?

Le plus grand côté est  $[AC]$ . On calcule donc  $AC^2$  et  $AB^2 + BC^2$  et on compare les résultats.

- $AC^2 = 6^2 = 36$
- $AB^2 + BC^2 = 3.6^2 + 4.8^2 = 12.96 + 23.04 = 36.$

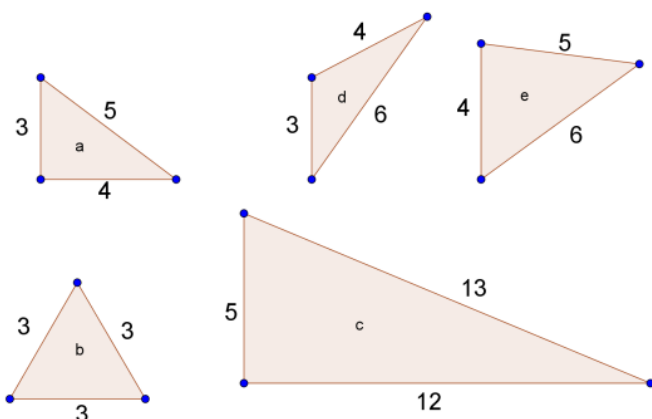
On a donc  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

Définition 2 (Triplet pythagoricien) : On appelle triplet pythagoricien  $(a; b; c)$ , trois nombres entiers  $a, b$  et  $c$  qui vérifie l'égalité de Pythagore :  $a^2 + b^2 = c^2$

Exemple 8 : Vérifier si les triplets suivants sont pythagoriciens :

- $(3; 4; 5) : 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$  et  $5^2 = 25$ . Oui
- $(6; 8; 10) : 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$  et  $10^2 = 100$ . Oui
- $(8; 15; 17) : 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$  et  $17^2 = 289$ . Oui
- $(6; 7; 9) : 36^2 + 49^2 = 36 + 49 = 85$  et  $9^2 = 81$ . Non

Exemple 9 : Parmi les triangles suivants déterminer mentalement ceux qui sont rectangles.



- a. Oui :  $3^2 + 4^2 = 5^2$
- b. Non :  $3^2 + 3^2 \neq 3^2$
- c. Oui :  $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
- d. Non :  $3^2 + 4^2 \neq 6^2$
- e. Non :  $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \neq 6^2$

