

Fiche A1.1 : La notion de limite

1 – Limite infinie

Définition 1 :

- On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, si pour tout nombre réel A aussi grand que l'on veut, il existe un rang à partir duquel, tous les termes sont supérieurs à A . On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$, si pour tout nombre réel A aussi grand que l'on veut, il existe un rang à partir duquel, tous les termes sont inférieurs à $-A$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Vocabulaire : On dit dans ce cas que la suite « **tend vers** $+\infty$ ou $-\infty$ ».

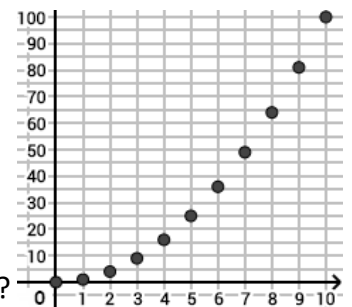
Explication : Dire qu'une suite tend vers l'infini signifie que les termes de la suite dépassent, à partir d'un certain rang, n'importe quelle valeur A fixé à l'avance.

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

- 1) Calculer les premiers termes de la suite (u_n) .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

- 2) Dans le repère ci-contre, représenter la suite (u_n) .



- 3) Que se passe-t-il lorsque n devient de plus en plus grand ? Quelle est sa limite ?

Les termes de la suite sont de plus en plus grand, aussi grand que l'on veut, en prenant un rang suffisamment grand. La limite de la suite est donc $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- 4) Dans le tableur, quelle formule doit-on entrer dans la cellule B2, pour calculer les termes de la suite u_n à l'aide du recopiage automatique ? On entre $= A2^2$

	A	B
1	n	u_n
2	30	900
3	31	961
4	32	1024
5	33	1089
6	...	...
7	99	9801
8	100	10000
9	...	...
10	314	98596
11	315	99225
12	316	99856
13	317	100489

- 5) Déterminer le rang à partir duquel tous les termes sont :

- Supérieur à $A = 100$: $n = 10$
- Supérieur à $A = 1000$: $n = 32$
- Supérieur à $A = 10000$: $n = 100$
- Supérieur à $A = 100000$: $n = 317$

- 6) Compléter puis exécuter l'algorithme suivant afin que celui-ci affiche le rang à partir duquel tous les termes de la suite seront supérieurs à $A = 100\,000$.

Algorithme

```
Variables : n, u
n ← 0
u ← 0
Tant que u < 100000 Faire
    n ← n + 1
    u ← n²
Fin Tant que
Afficher n
```

Exécution

```
n = 0
u = 0
u < 100 000
n = 1
u = 1
u < 100 000
...
n = 317
u = 100489
u ≥ 100 000
Afficher « 317 »
```

Programme Python

```
from math import*

n=0
u=0
while u<100000 :
    n=n+1
    u=n**2
print(n)
```



2 – Limite finie

Définition 2 : Soit l un nombre réel. On dit que la suite (u_n) a pour limite l , si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, il existe un rang à partir duquel, tous les termes sont à une distance de l inférieur à ε . Dans ce cas, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Remarque : Dire que la distance entre u_n et l est inférieure à ε s'écrit¹ $|u_n - l| < \varepsilon$

Vocabulaire : On dit dans ce cas que la suite « **tend vers** l ».

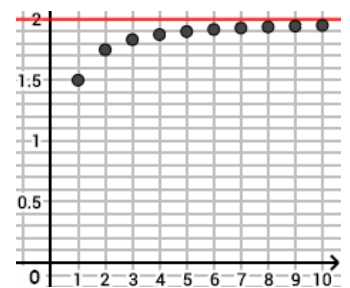
Explication : Dire qu'une suite tend vers l signifie, qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapproche aussi proche que l'on veut de l , à une distance inférieure à n'importe quel écart ε fixé à l'avance.

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{4n-1}{2n}$

1) A l'aide de la calculatrice, calculer les premiers termes de la suite (u_n) .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1.5	1.75	1.83	1.87	1.9	1.91	1.92	1.93	1.94	1.95

2) Dans le repère ci-contre, représenter le suite (u_n) .



3) Que se passe-t-il lorsque n devient de plus en plus grand ? Quel est sa limite ?

Les termes de la suite se rapproche de plus en plus de « 2 », aussi proche que l'on veut, en prenant un rang suffisamment grand. La limite de la suite est donc 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

4) Dans le tableur, quelle formule doit-on entrer dans la cellule B2, pour calculer les termes de la suites u_n à l'aide du recopiage automatique ?

	A	B
1	n	u_n
2	46	1.9891304
3	47	1.9893617
4	48	1.9895833
5	49	1.9897959
6	50	1.99
7	51	1.9901961
8	52	1.9903846

On entre = (4 * A2 - 1)/(2 * A2)

5) Déterminer le rang à partir duquel tous les termes sont distant de la limite de :

• Moins de $\varepsilon = \frac{1}{10}$: $n = 6$

• Moins de $\varepsilon = \frac{1}{100}$: $n = 51$

6) Calculer la distance entre u_{46} et sa limite (arrondie à 10^{-4} près)

$$|u_{46} - 2| \approx |1.9891 - 2| = |-0.0109| = 0.0109$$

7) Compléter puis exécuter l'algorithme suivant afin que celui-ci affiche le rang à partir duquel tous les termes de la suite seront distant de moins de $\varepsilon = \frac{1}{100}$ de la limite.

Algorithme

```
Variables : n, u
n ← 1
u ← 1.5
Tant que |u - 2| ≥ 0.01 Faire
    n ← n + 1
    u ← (4n-1)/(2n)
Fin Tant que
Afficher n
```

Exécution

```
n = 1
u = 1.5
|1.5 - 2| = 0.5 ≥ 0.01
n = 2
u = 1.75
|1.75 - 2| = 0.25 ≥ 0.01
...
n = 51
u ≈ 1.9901
|1.9901 - 2| = 0.0099 < 0.01
Afficher « 51 »
```

Programme Python

```
from math import*

n=1
u=1.5
while abs(u-2)>=0.01 :
    n=n+1
    u=(4*n-1)/(2*n)
print(n)

# Attention aux parenthèses
```

¹ $|x|$ désigne la **valeur absolue** de x : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



