

Fiche A1.1 : Raisonnement par récurrence

1 - Principe du raisonnement par récurrence

- En mathématiques, on doit souvent démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Par exemple : « Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- On ne peut pas vérifier cette propriété pour chaque valeur de n (il y en a une infinité).

Le **raisonnement par récurrence** permet de la démontrer en deux étapes.

Théorème (Principe de récurrence) : Soit (P_n) une propriété dépendant d'un entier naturel n . Si :

- **Initialisation** : la propriété P_0 est vraie ;
 - **Hérédité** : pour tout entier $n \geq 0$, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie ;
- alors la propriété P_n est vraie **pour tout entier naturel n** .

Remarques :

- Les 2 étapes (initialisation et hérédité) sont **indispensables**. L'une sans l'autre ne permet pas de conclure.
- Pour l'hérédité, on suppose P_n vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on démontre que P_{n+1} est vraie.
- La récurrence peut démarrer à un rang $n_0 \geq 0$. La propriété est alors démontrée pour tout $n \geq n_0$.

Méthode : La rédaction d'une récurrence suit toujours le plan suivant :

1. **Énoncer** la propriété P_n à démontrer.
2. **Initialisation** : Vérifier que P_0 (ou P_{n_0}) est vraie.
3. **Hérédité** : On fixe n , on suppose P_n vraie et on démontre P_{n+1} .
4. **Conclusion** : Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 - Exemples d'application

Exemple 1 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

• **Énoncé** :

• **Initialisation** :

• **Hérédité** :

• **Conclusion** :

Exemple 2 (Inégalité de Bernoulli) : Démontrer que pour tout $a > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

• **Enoncé :**

• **Initialisation :**

• **Hérédité :**

• **Conclusion :**

Point de vigilance : multiplier une inégalité par un nombre n en conserve le sens que si ce nombre est positif. C'est exactement là qu'intervient l'hypothèse $a > -1$: il faut la citer au moment où l'on multiplie, sinon la démonstration est incomplète.

Exemple 3 : Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

• **Enoncé :**

• **Initialisation :**

• **Hérédité :**

• **Conclusion :**

Remarque (méthode avec la fonction f) : on pose $f(x) = \frac{1+x}{2}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient $\frac{1}{2} > 0$)

Or, une fonction est croissante sur I si pour tout x, y de I , $x \leq y$ (antécédents) $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (images)

Cette rédaction est à retenir pour toutes les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$: elle sert aussi à démontrer le sens de variation (voir fiche A1.2).