

Fiche A1.1 : Raisonnement par récurrence

1 - Principe du raisonnement par récurrence

- En mathématiques, on doit souvent démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Par exemple : « Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- On ne peut pas vérifier cette propriété pour chaque valeur de n (il y en a une infinité).

Le **raisonnement par récurrence** permet de la démontrer en deux étapes.

Théorème (Principe de récurrence) : Soit (P_n) une propriété dépendant d'un entier naturel n . Si :

- **Initialisation** : la propriété P_0 est vraie ;
 - **Hérédité** : pour tout entier $n \geq 0$, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie ;
- alors la propriété P_n est vraie **pour tout entier naturel n** .

Remarques :

- Les 2 étapes (initialisation et hérédité) sont **indispensables**. L'une sans l'autre ne permet pas de conclure.
- Pour l'hérédité, on suppose P_n vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on démontre que P_{n+1} est vraie.
- La récurrence peut démarrer à un rang $n_0 \geq 0$. La propriété est alors démontrée pour tout $n \geq n_0$.

Méthode : La rédaction d'une récurrence suit toujours le plan suivant :

1. **Énoncer** la propriété P_n à démontrer.
2. **Initialisation** : Vérifier que P_0 (ou P_{n_0}) est vraie.
3. **Hérédité** : On fixe n , on suppose P_n vraie et on démontre P_{n+1} .
4. **Conclusion** : Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 - Exemples d'application

Exemple 1 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **Énoncé** : Soit la propriété P_n : « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ». Montrons que pour tout $n \geq 1$, P_n est vraie.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$: à gauche 1 ; à droite $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \geq 1$ fixé. On suppose P_n vraie, c'est-à-dire $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

On doit alors montrer P_{n+1} c'est à dire $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Or : $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$ (par Hypothèse de récurrence)

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \text{ (Factorisation par } n + 1 \text{)}$$

- **Conclusion** : P_1 est vraie et sous l'hypothèse P_n , P_{n+1} est vraie.

Par le principe de récurrence pour tout $n \geq 1$, P_n est vraie. □

Exemple 2 (Inégalité de Bernoulli) : Démontrer que pour tout $a > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

- **Enoncé** : Soit un réel $a > -1$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ » est vraie.
- **Initialisation** : Pour $n = 0$: à gauche $(1 + a)^0 = 1$; à droite $1 + 0 \times a = 1$. On a bien $1 \geq 1$. Donc P_0 est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose P_n vraie, c'est-à-dire P_n : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

On doit alors montrer P_{n+1} , c'est-à-dire $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$.

Par Hypothèse de récurrence on a $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Multiplions les deux membres de l'inégalité par $(1 + a)$.

Comme $a > -1$, on a $1 + a > 0$ l'inégalité ne change pas de sens et on obtient donc :

$$(1 + a)^n \times (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a)$$

$$\text{D'où } (1 + a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2$$

Puis, $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$ (car $na^2 \geq 0$: un produit de deux nombres positifs)

Ce qui montre que P_{n+1} est vraie.

- **Conclusion** : P_0 est vraie et sous l'hypothèse P_n , P_{n+1} est vraie.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie. □

Point de vigilance : multiplier une inégalité par un nombre n'en conserve le sens que si ce nombre est positif.

C'est exactement là qu'intervient l'hypothèse $a > -1$: il faut la citer au moment où l'on multiplie, sinon la démonstration est incomplète.

Exemple 3 : Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

- **Enoncé** : Soit la propriété P_n : « $u_n \geq 1$ ». Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.
- **Initialisation** : Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $2 \geq 1$. Donc P_0 est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose P_n vraie, c'est-à-dire $u_n \geq 1$.

On doit alors montrer P_{n+1} , c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 1$, autrement dit $\frac{1+u_n}{2} \geq 1$.

Or : $u_n \geq 1$ (par hypothèse de récurrence)

donc $1 + u_n \geq 2$ (on ajoute 1 aux deux membres)

donc $\frac{1+u_n}{2} \geq \frac{2}{2} = 1$ (on divise par $2 > 0$: le sens de l'inégalité est conservé)

c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 1$: P_{n+1} est vraie.

- **Conclusion** : P_0 est vraie et sous l'hypothèse P_n , P_{n+1} est vraie.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie. □

Remarque (méthode avec la fonction f) : on pose $f(x) = \frac{1+x}{2}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient $\frac{1}{2} > 0$)

Or, une fonction est croissante sur I si pour tout x, y de I , $x \leq y$ (antécédents) $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (images)

Si $u_n \geq 1$ (Hypothèse de Récurrence), alors $f(u_n) \geq f(1)$, et donc $u_{n+1} \geq 1$ (car $u_{n+1} = f(u_n)$).

Cette rédaction est à retenir pour toutes les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$: elle sert aussi à démontrer le sens de variation (voir fiche A1.2).