

## Fiche A1.2 : Calcul de limites

### 1 – Suites de références

#### Propriété 1 :

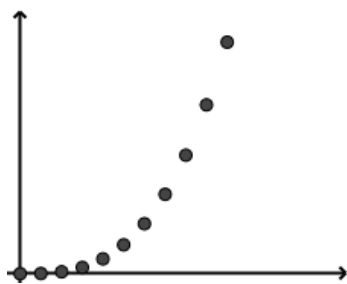
- Les suites de terme général  $n, n^2, n^3, n^k$  (où  $k$  est un entier positif) et  $\sqrt{n}$  ont pour limite  $+\infty$ .
- Les suites de terme général  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^k}$  (où  $k$  est un entier positif) et  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ont pour limite 0.

Remarque : On peut même énoncer une propriété plus générale. Soit  $a$  un nombre réel :

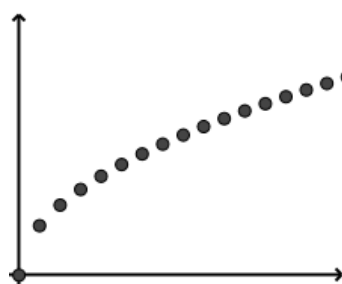
- Si  $a > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$
- Si  $a < 0$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0$

#### Exemple 1 :

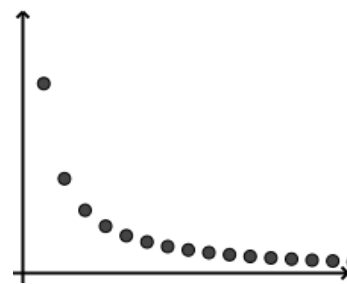
•  $a = 3 : u_n = n^3$



•  $a = 0.5 : u_n = n^{1/2} = \sqrt{n}$



•  $a = -1 : u_n = n^{-1} = 1/n$



Propriété 2 : La limite d'une suite **constante** est égal à sa valeur.

### 2 – Opérations sur les limites

• Règles pour la somme :

|                                          |          |           |           |           |           |             |
|------------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$       | $L$      | $L$       | $L$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$   |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$       | $L'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$   |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | <b>F.I.</b> |

• Règles pour le produit :

|                                        |               |            |            |             |
|----------------------------------------|---------------|------------|------------|-------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$     | $L$           | $L$        | $\infty$   | $0$         |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$     | $L'$          | $\infty$   | $\infty$   | $\infty$    |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$ | $L \times L'$ | $\infty^*$ | $\infty^*$ | <b>F.I.</b> |

• Règles pour le quotient :

|                                                |                |            |          |            |             |             |
|------------------------------------------------|----------------|------------|----------|------------|-------------|-------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$             | $L$            | $L \neq 0$ | $L$      | $\infty$   | $\infty$    | $0$         |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$             | $L' \neq 0$    | $0$        | $\infty$ | $L$        | $\infty$    | $0$         |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$ | $\frac{L}{L'}$ | $\infty^*$ | <b>0</b> | $\infty^*$ | <b>F.I.</b> | <b>F.I.</b> |

#### Exemple 2 :

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 1 = 1$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2 = -\infty$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2 + 1} = 0$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n = -\infty$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} - 3n = -\infty$

(\*) : On utilise la règle des signes pour déterminer si c'est  $+\infty$  ou  $-\infty$

*F.I.* : signifie « Forme Indéterminée », c'est-à-dire que l'on ne peut pas calculer directement.



**Remarque** : Lorsque l'on tombe sur une des 4 formes indéterminées («  $\infty - \infty$  », «  $0 \times \infty$  », «  $\frac{\infty}{\infty}$  » ou «  $\frac{0}{0}$  »),

il est souvent possible de « lever l'indétermination » en transformant le terme général de la suite.

**Exemple 3** : Calculer les limites ci-dessous.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \infty - \infty$  donc *FI*. On factorise :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n - 1) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \times n^2 = 0 \times (+\infty)$  donc *FI*. On simplifie :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \times n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{2n-3} = \frac{\infty}{\infty}$  donc *FI*. On factorise numérateur et dénominateur :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(4+\frac{5}{n})}{n(2-\frac{3}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4+\frac{5}{n}}{2-\frac{3}{n}}$   
Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{5}{n} = 4$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{n} = 2$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{2n-3} = \frac{4}{2} = 2$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n-3}} = \frac{0}{0}$  donc *FI*. :  $\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n-3}} = \frac{1}{n^2+1} \times \frac{n-3}{1} = \frac{n-3}{n^2+1} = \frac{n(1-\frac{3}{n})}{n(n+\frac{1}{n})} = \frac{1-\frac{3}{n}}{n+\frac{1}{n}}$   
Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{n} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n} = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n-3}} = 0$ .

### 3 – Théorèmes de comparaison

**Propriété 3** : On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  tel que à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n$

(1) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$       (2) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

(3) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$  avec  $L$  et  $L'$  deux nombres réels alors on a  $L \leq L'$

**Remarque** : En particulier, si une suite convergente  $(u_n)$  est majorée par un réel  $M$ , c'est-à-dire que pour tout rang  $n$ ,  $u_n < M$ , alors sa limite  $L$  est inférieure ou égal à  $M$ .

**Exemple 4** : Pour tout  $n \geq 0$ , on a  $0 < \frac{n}{n+1} < 1$  donc si la limite existe on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \in [0,1]$

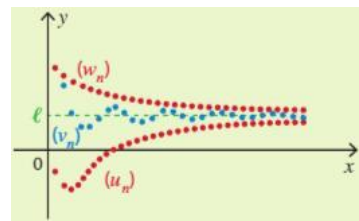
**Exemple 5** : Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1}$

Pour tout  $n \geq 0$ , on a  $n^2 + 1 > n^2$  d'où  $\sqrt{n^2 + 1} > \sqrt{n^2} = n$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$

**Propriété 4** : On considère trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  tel que à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n \leq w_n$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$

**Remarque** : Cette propriété est appelée le théorème des gendarmes car la suite  $(v_n)$  est comme « encadré » par deux gendarmes, les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$ , qui en convergeant tous deux vers la limite  $L$ , ne laisse pas d'autre choix à la suite  $(v_n)$  de converger aussi vers  $L$ .



**Exemple 6** : Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{2 \times (-1)^n}{n^2}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ .

En multipliant par 2 l'inégalité précédente on obtient,  $-2 \leq 2 \times (-1)^n \leq 2$

Puis en divisant par  $n^2$  qui est positif on obtient  $\frac{-2}{n^2} \leq \frac{2 \times (-1)^n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^2} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$  donc d'après le théorème des gendarmes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

