

Fiche A1.2 : Convergence des suites

1 - Rappels : Sens de variation d'une suite

Définition 1 : Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Vocabulaire : (u_n) est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante

Méthodes : Pour étudier le sens de variation, on peut :

- On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Pour les suites à termes strictement positifs uniquement : on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Si $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

- Méthode 1 : $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. Or $2n + 1 > 0$ (car $n \geq 0$), donc pour tout rang n , $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est croissante.
- Méthode 2 : Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > 1$ car $1 + \frac{1}{n} > 1$. donc pour tout rang $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et de plus $u_1 > u_0$ donc la suite (u_n) est croissante
- Méthode 3 : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2$ qui est croissante sur $[0; +\infty[$, donc (u_n) est croissante.

2 - Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2 : Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n , $u_n \leq M$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n , $u_n \geq m$.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
- Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemple 2 : Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$.

- On a montré dans la fiche précédente (exemple 3) que (u_n) est minorée par 1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
- La suite est décroissante : $u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{2} - u_n = \frac{1+u_n-2u_n}{2} = \frac{1-u_n}{2}$. Or $u_n \geq 1$ donc $1-u_n \leq 0$, donc $\frac{1-u_n}{2} \leq 0$, Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite est décroissante.
- Elle est donc majorée par son premier terme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 = 2$.
- Elle est donc bornée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

3 - Limite d'une suite

Définition 3 (Limite infinie) : On dit qu'une suite (u_n) **tend vers $+\infty$** si tout intervalle $[A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

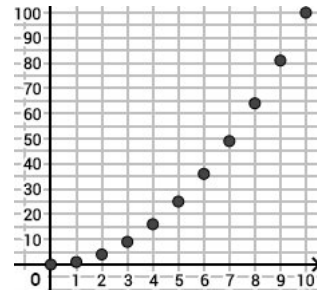
De même, (u_n) **tend vers $-\infty$** si tout intervalle $]-\infty ; A]$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang.

Notation : On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Exemple 3 : La suite définie pour tout rang n par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Quelque soit le réel A , il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes sont plus grand que A :

- Supérieur à $A = 10000$: $n_0 = 100$
- Supérieur à $A = 100000$: $n_0 = 317$
- Plus généralement pour A fixé, $n_0 = \sqrt{A}$.



Programme Python

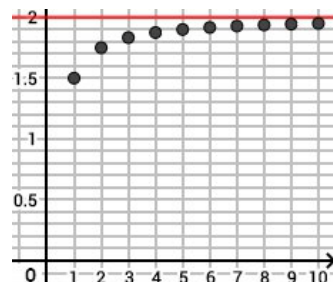
```
from math import*
n=0
u=0
while u<1000000 :
    n=n+1
    u=n**2
    print(n)
```

Définition 4 (Limite finie) : La suite (u_n) **converge vers ℓ** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Notation : On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et on dit que la suite est convergente.

Exemple 4 : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{4n-1}{2n}$ converge vers 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

- Les termes de la suite se rapproche de plus en plus de la valeur « 2 », et aussi proche que l'on veut.
- Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n - 2| < \varepsilon$ (où $|u_n - 2|$ = la distance entre u_n et 2)
- Pour $\varepsilon = 0.01$ on a $n_0 = 51$



	A	B
1	n	u_n
2	46	1.9891304
3	47	1.9893617
4	48	1.9895833
5	49	1.9897959
6	50	1.99
7	51	1.9901961
8	52	1.9903846

Remarque : Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** : soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit elle n'a pas de limite. Exemple : $u_n = (-1)^n$ alterne entre -1 et 1 et n'a pas de limite.

4 - Théorèmes de convergence

Théorème 1 : Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers $+\infty$.

Démonstration : Soit (u_n) croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme A n'est pas un majorant, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq n_0$: $u_n \geq u_{n_0} > A$. Donc $u_n \rightarrow +\infty$. $\square$

Théorème 2 (admis) : Toute suite **croissante et majorée** ou **décroissante et minorée** est convergente.

Remarque : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite.

Exemple 5 : On a montré que la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$ était décroissante et minorée.

D'après le théorème précédent elle est donc convergente (mais à priori pas forcément vers 1)