

Fiche A1.2 : Division euclidienne

1 - Le théorème de la division euclidienne

- À l'école primaire, on écrit $17 = 5 \times 3 + 2$: « dans 17, il y a 3 fois 5, et il reste 2 ». Le reste est toujours **plus petit que le diviseur**. On étend cette division aux entiers relatifs.

Théorème : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un **unique** couple $(q ; r)$ d'entiers relatifs tel que :

$a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** (d.e.) de a par b .

Remarque : Le théorème s'étend à a et b relatifs avec $0 \leq r < |b|$

Démonstration :

- **Existence** : Soit $q = E\left[\frac{a}{b}\right]$ la partie entière de $\frac{a}{b}$: c'est-à-dire l'entier tel que $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$.

Comme $b > 0$, on obtient $bq \leq a < bq + b$, soit $0 \leq a - bq < b$.

On pose $r = a - bq$: alors $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

- **Unicité** : Supposons que l'on a l'existence de deux couples d'entiers relatifs $(q ; r)$ et $(q' ; r')$ tel que :

$$a = bq + r = bq' + r' \text{ avec } 0 \leq r < b \text{ et } 0 \leq r' < b.$$

Alors $b(q - q') = r' - r$, et cela signifie que b divise $r' - r$ et donc que $r' - r$ est un multiple de b .

Comme $0 \leq r < b$, on a $-b < -r \leq 0$. En additionnant avec $0 \leq r' < b$ on obtient $-b < r' - r < b$,

Mais comme le seul multiple de b compris entre lui-même et son opposé est 0, on a $r' - r = 0$.

Donc $r = r'$, puis $bq = bq'$ et $q = q'$ car $b \neq 0$. $\square$

Point de vigilance : le reste est toujours **positif ou nul**. L'égalité $-17 = 5 \times (-3) - 2$ n'est pas la division euclidienne de -17 par 5 (car $-2 < 0$). On écrit $-17 = 5 \times (-4) + 3$: le quotient est -4 et le reste 3.

Exemple 1 : Effectuer la division euclidienne de 2026 par 7, puis celle de -2026 par 7.

- $\frac{2026}{7} \approx 289,4$ donc $q = 289$; $7 \times 289 = 2023$ et $r = 2026 - 2023 = 3$: $2026 = 7 \times 289 + 3$ avec $0 \leq 3 < 7$.
- $-2026 = 7 \times (-289) - 3$ ne convient pas. On a $-2026 = 7 \times (-290) + 4$ avec $0 \leq 4 < 7$: $q = -290$ et $r = 4$.

Exemple 2 : On a $107 = 12 \times 8 + 11$. Cette égalité correspond-elle à la d.e. de 107 par 12 ? par 8 ?

- Par 12 : $0 \leq 11 < 12$, donc $q = 8$ et $r = 11$.
- Par 8 : $11 \geq 8$, l'égalité ne convient pas. $107 = 8 \times 13 + 3$ avec $0 \leq 3 < 8$: $q = 13$ et $r = 3$.

Algorithme : Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on obtient q et r en retranchant b à a autant de fois que possible (**soustractions successives**). À chaque tour de boucle, l'égalité $a = bq + r$ reste vraie et r diminue de b .

La boucle s'arrête, et à la sortie $0 \leq r < b$. Par exemple, `division(2026, 7)` renvoie (289, 3).

```
def division(a, b):
    q, r = 0, a
    while r >= b:
        r = r - b
        q = q + 1
    return q, r
```

En Python, le quotient et le reste s'obtiennent directement (y compris pour $a < 0$) :

```
>>> -2026 // 7, -2026 % 7
(-290, 4)
```

2 - Division euclidienne et divisibilité

Propriété 1 : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Démonstration : Si $r = 0$, alors $a = bq$ et $b|a$. Réciproquement, si $a = bk$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $a = bk + 0$ avec $0 \leq 0 < b$: par unicité de la division euclidienne, le reste est 0. $\square$

Propriété 2 : Dans la division euclidienne par $b \in \mathbb{N}^*$, il y a b restes possibles : $0 ; 1 ; \dots ; b-1$. Tout entier n s'écrit donc sous l'une des formes $bk, bk + 1, \dots, bk + (b-1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3 : Déterminer l'écriture générale des entiers via leur d.e. par $b = 2; 3; 4$.

- Tout entier est pair ($n = 2k$) ou impair ($n = 2k + 1$).
- Tout entier s'écrit $3k, 3k + 1$ ou $3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Tout entier impair s'écrit $4k + 1$ ou $4k + 3$. Tout entier pair s'écrit $4k$ ou $4k + 2$.

Méthode (disjonction des cas) : pour démontrer une propriété d'un entier n , on distingue les cas suivant le **reste** de la division euclidienne de n par un entier b bien choisi. Dans chaque cas, on écrit $n = bk + r$ et on calcule.

Exemple 4 : Démontrer que pour tout entier n , $n^2 + 1$ n'est pas divisible par 3.

- Si $n = 3k$: $n^2 + 1 = 9k^2 + 1 = 3 \times 3k^2 + 1$: le reste de la division par 3 est 1.
- Si $n = 3k + 1$: $n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3(3k^2 + 2k) + 2$: le reste est 2.
- Si $n = 3k + 2$: $n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2$: le reste est 2.

Dans tous les cas, le reste n'est pas nul : $n^2 + 1$ n'est jamais divisible par 3.

Exemple 5 : Démontrer que pour tout entier n , le produit $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 3.

- Si $n = 3k$, le facteur n est un multiple de 3.
- Si $n = 3k + 1$, alors $n + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ est un multiple de 3.
- Si $n = 3k + 2$, alors $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ est un multiple de 3.

Dans tous les cas, l'un des facteurs est multiple de 3, donc le produit aussi (propriété 2 de la fiche A1.1).

Remarque : De même, $n(n + 1)(n + 2)$ est pair (deux entiers consécutifs dont l'un est pair). On montrera au chapitre suivant (théorème de Gauss) qu'un entier divisible par 2 et par 3 est divisible par 6.