

Fiche A1.3 : Calcul de limites

1 - Suites de références

Propriété 1 :

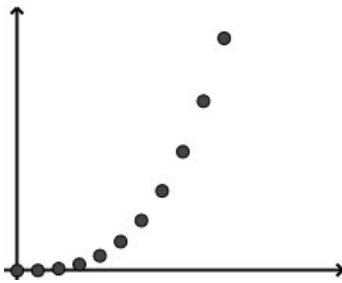
- Les suites de terme général $n ; n^2 ; n^3 ; n^k$ (où $k \in \mathbb{N}$) ; $\sqrt{n}$ et e^n ont pour limite $+\infty$.
- Les suites de terme général $\frac{1}{n} ; \frac{1}{n^2} ; \frac{1}{n^3} ; \frac{1}{n^k}$ (où $k \in \mathbb{N}$) ; $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et e^{-n} ont pour limite 0.

Remarque : On peut même énoncer une propriété plus générale. Soit a un nombre réel :

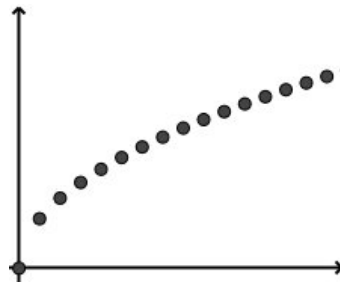
- Si $a > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$
- Si $a < 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0$

Exemple 1 :

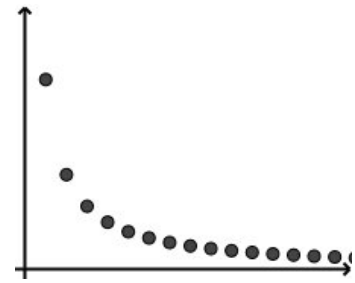
• $a = 3 : u_n = n^3$



• $a = 0.5 : u_n = n^{1/2} = \sqrt{n}$



• $a = -1 : u_n = n^{-1} = 1/n$



Propriété 2 : La limite d'une suite **constante** est égal à sa valeur.

2 - Opérations sur les limites

- Règles pour la somme :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

- Règles pour le produit :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	$L \times L'$	∞^*	∞^*	F.I.

- Règles pour le quotient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	∞^*	0	∞^*	F.I.	F.I.

Exemple 2 : Calculer les limites suivantes :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 1$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n}$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2 + 1}$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} - 3n$

(*) : On utilise la règle des signes pour déterminer si c'est $+\infty$ ou $-\infty$

F.I. : signifie « Forme Indéterminée », c'est-à-dire que l'on ne peut pas calculer directement.

Remarque : Lorsque l'on tombe sur une des 4 formes indéterminées (« $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ »),

il est souvent possible de « lever l'indétermination » en transformant le terme général de la suite.

Exemple 3 : Calculer les limites ci-dessous.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \times n^2$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{2n-3}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-3}{n^2+1}$

3 - Théorèmes de comparaison

Propriété 3 : On considère deux suites (u_n) et (v_n) tel que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

- (1) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (2) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
 (3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$ avec L et L' deux nombres réels alors on a $L \leq L'$

Remarque : En particulier, si une suite convergente (u_n) est majorée par un réel M , c'est-à-dire que pour tout rang n , $u_n < M$, alors sa limite L est inférieur ou égal à M .

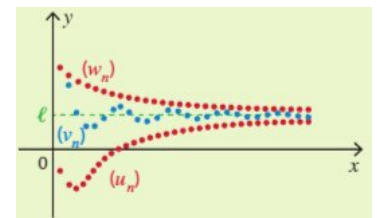
Exemple 4 : Pour tout $n \geq 0$, on a $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ donc si la limite existe on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \in [0,1]$

Exemple 5 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1}$:

Propriété 4 : On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) tel que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$

Remarque : Cette propriété est appelée le théorème des gendarmes car la suite (v_n) est comme « encadré » par deux gendarmes, les suites (u_n) et (w_n) , qui en convergeant tous deux vers la limite L , ne laisse pas d'autre choix à la suite (v_n) de converger aussi vers L .



Exemple 6 : Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $v_n = \frac{2\cos(n)}{n^2}$.