

Fiche A1.3 : Calcul de limites

1 - Suites de références

Propriété 1 :

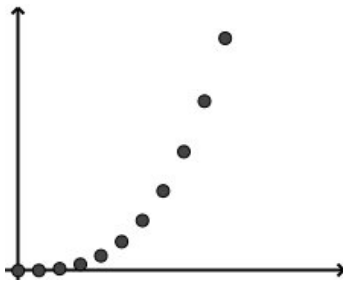
- Les suites de terme général $n ; n^2 ; n^3 ; n^k$ (où $k \in \mathbb{N}$) ; $\sqrt{n}$ et e^n ont pour limite $+\infty$.
- Les suites de terme général $\frac{1}{n} ; \frac{1}{n^2} ; \frac{1}{n^3} ; \frac{1}{n^k}$ (où $k \in \mathbb{N}$) ; $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et e^{-n} ont pour limite 0.

Remarque : On peut même énoncer une propriété plus générale. Soit a un nombre réel :

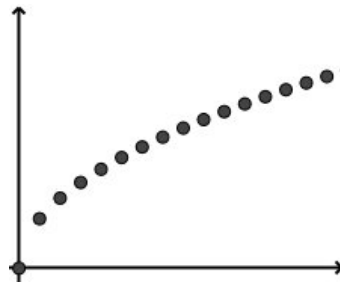
- Si $a > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$
- Si $a < 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0$

Exemple 1 :

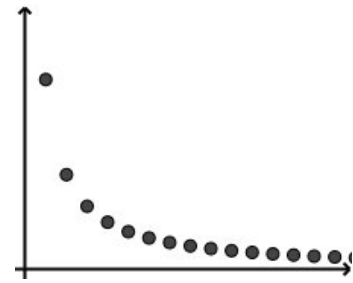
• $a = 3 : u_n = n^3$



• $a = 0.5 : u_n = n^{1/2} = \sqrt{n}$



• $a = -1 : u_n = n^{-1} = 1/n$



Propriété 2 : La limite d'une suite **constante** est égal à sa valeur.

2 - Opérations sur les limites

• Règles pour la somme :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

• Règles pour le produit :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	$L \times L'$	∞^*	∞^*	F.I.

• Règles pour le quotient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	∞^*	0	∞^*	F.I.	F.I.

Exemple 2 :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 1 = 1$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2 = -\infty$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2 + 1} = 0$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n = -\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} - 3n = -\infty$

(*) : On utilise la règle des signes pour déterminer si c'est $+\infty$ ou $-\infty$

F.I. : signifie « Forme Indéterminée », c'est-à-dire que l'on ne peut pas calculer directement.

Remarque : Lorsque l'on tombe sur une des 4 formes indéterminées (« $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ »),

il est souvent possible de « lever l'indétermination » en transformant le terme général de la suite.

Exemple 3 : Calculer les limites ci-dessous.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \infty - \infty$ donc FI. On factorise : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \times n^2 = 0 \times (+\infty)$ donc FI. On simplifie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \times n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{2n-3} = \frac{\infty}{\infty}$ donc FI. On factorise numérateur et dénominateur : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(4+\frac{5}{n})}{n(2-\frac{3}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4+\frac{5}{n}}{2-\frac{3}{n}}$
Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{5}{n} = 4$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{n} = 2$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+5}{2n-3} = \frac{4}{2} = 2$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-3}{n^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$ donc FI. : $\frac{n-3}{n^2+1} = \frac{n(1-\frac{3}{n})}{n(n+\frac{1}{n})} = \frac{1-\frac{3}{n}}{n+\frac{1}{n}}$
Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n} = +\infty$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-3}{n^2+1} = 0$.

3 - Théorèmes de comparaison

Propriété 3 : On considère deux suites (u_n) et (v_n) tel que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

- (1) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (2) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
(3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$ avec L et L' deux nombres réels alors on a $L \leq L'$

Remarque : En particulier, si une suite convergente (u_n) est majorée par un réel M , c'est-à-dire que pour tout rang n , $u_n < M$, alors sa limite L est inférieur ou égal à M .

Exemple 4 : Pour tout $n \geq 0$, on a $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ donc si la limite existe on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \in [0,1]$

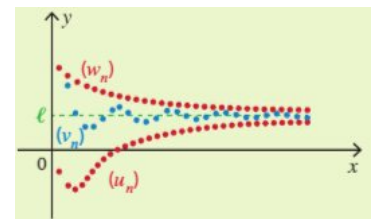
Exemple 5 : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1}$: Pour tout $n \geq 0$, on a $n^2+1 > n^2$ d'où $\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n$.

(Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$). Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$

Propriété 4 : On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) tel que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$

Remarque : Cette propriété est appelée le théorème des gendarmes car la suite (v_n) est comme « encadré » par deux gendarmes, les suites (u_n) et (w_n) , qui en convergeant tous deux vers la limite L , ne laisse pas d'autre choix à la suite (v_n) de converger aussi vers L .



Exemple 6 : Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $v_n = \frac{2\cos(n)}{n^2}$.

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq \cos \leq 1$.

En multipliant par 2 l'inégalité précédente on obtient, $-2 \leq 2 \times \cos(n) \leq 2$

Puis en divisant par n^2 qui est positif (car $n \geq 1$) on obtient $\frac{-2}{n^2} \leq \frac{2\cos(n)}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$