

Fiche A1.3 : Limites des suites arithmétiques et géométriques

1 – Limite d'une suite arithmétique

Propriété 1 : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 .

- Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- Si $r = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

Remarque : On peut démontrer cette propriété en utilisant la formule explicite d'une suite arithmétique.

Exemple 1 : Déterminer les limites des suites arithmétiques (u_n) dans les cas suivants :

- $u_0 = -1$ et $r = 5$: Pour tout rang n , on a $u_n = -1 + 5n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- $u_0 = 1$ et $r = 3$: Pour tout rang n , on a $u_n = 1 - 3n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- $u_0 = 2$ et $r = 0$: La suite est constante égale à 2 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

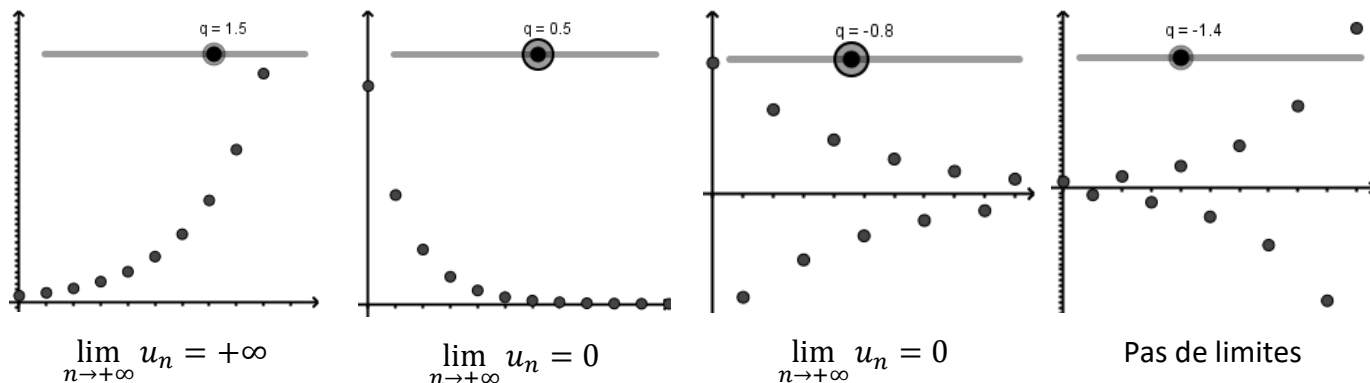
2 – Limite d'une suite géométrique

Propriété 2 : Soit q un nombre réel positif.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

Remarque : Lorsque q est négatif alors la suite (q^n) n'a pas de limite lorsque $q \leq -1$

Exemple 2 : Représentation graphique et limite de la suite $u_n = q^n$ en fonction de q



Propriété 2 : On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ et de premier terme u_0 .

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ où le signe est donné par celui de u_0
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

Remarque : On peut démontrer cette propriété en utilisant la formule explicite d'une suite géométrique.

Exemple 3 : Déterminer les limites des suites arithmétiques (u_n) dans les cas suivants :

- $u_0 = -5$ et $q = 2$: Pour tout rang n , on a $u_n = (-5) \times 2^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$: Pour tout rang n , on a $u_n = 3 \times 0.5^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- $u_0 = -1$ et $q = 1$: La suite est constante égale à -1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$



3 – Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 3 (admise) : Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ s'écrit également $\sum_{k=0}^n q^k$ (Par convention on a $q^0 = 1$)

Exemple 4 : $\sum_{k=0}^{10} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = \frac{1-2^{11}}{-1} = \frac{1-2056}{-1} = 2055$

Propriété 4 : Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$

Remarque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k$ peut s'écrire également $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

Démonstration : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ car comme $q < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$

Exemple 5 : Un homme marche à l'infini, en parcourant un premier pas d'un mètre, puis à chaque fois, en effectuant un pas deux fois plus petit que le précédent. Quelle distance totale va-t-il parcourir ?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Il va parcourir une distance totale de 2 m.

Propriété 5 : On considère une suite géométrique (u_n) de raison $0 < q < 1$ et de premier terme u_0 .

On note S_n la somme des $n + 1$ termes de la suite (u_n) : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{u_0}{1-q}$$

Remarque : On a $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration :

- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = {}^{(1)} \sum_{k=0}^n u_0 \times q^k = {}^{(2)} u_0 \times \sum_{k=0}^n q^k = {}^{(3)} u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
 - On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = u_0 \times \frac{1}{1-q} = \frac{u_0}{1-q}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$
- (1) On utilise la formule explicite de (u_n)
(2) On factorise par u_0 .
(3) On utilise la *Propriété 3*

Exemple 6 : On fait osciller un pendule le long d'une ficelle de 50 cm. Les frottements de l'air sur le pendule ralentissent le pendule, et on considère qu'après chaque balancement il parcourt une distance diminuée de 1% par rapport au tour précédent. Le pendule est lâché, écarté de sa position d'équilibre de sorte que la ficelle soit parallèle au sol. On note d_n la distance parcouru par le pendule après le $n^{\text{ème}}$ balancement

1) Justifier que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

- On admet que le pendule commence par réaliser un $1/4$ de tour $45^\circ + 45^\circ$ (en réalité un peu moins...).

On a donc $d_0 = \frac{\pi}{2} \times 50 = 25\pi \approx 78.5$ cm.

- Chaque tour, il parcourt une distance diminuée de 1% : $d_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{100}\right) \times d_n = 0.99 d_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0.99$

2) Calculer la distance total parcouru par le pendule.

- On considère que le pendule oscille à l'infini (en réalité ce n'est pas le cas...)
- On doit ainsi calculer la somme de toutes les distances parcourus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k = \frac{d_0}{1-q} = \frac{25\pi}{1-0.99} = \frac{25\pi}{0.01} = 2500\pi \approx 7854 \text{ cm soit environ } 78,5 \text{ m}$$

