

Fiche A1.4 : Suites arithmétiques et géométriques

1 - Rappels

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$
Sens de variation	$r > 0$: croissante ; $r < 0$: décroissante ; $r = 0$: constante	Pour $u_0 > 0$ (on inverse pour $u_0 < 0$) : $q > 1$: croissante $0 < q < 1$: décroissante ; $q = 1$: constante ;

2 - Limites

Propriété 1 : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 .

- Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- Si $r = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

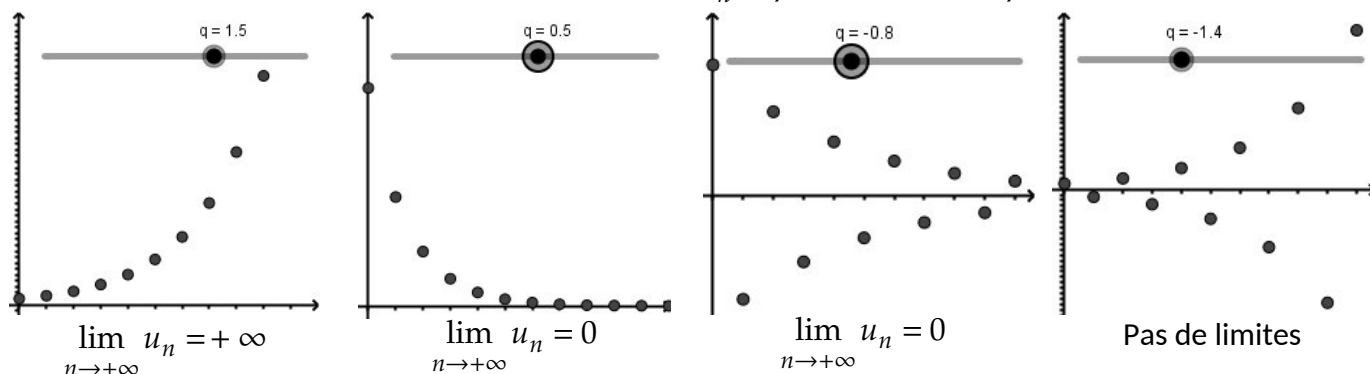
Propriété 2 : Soit q un nombre réel

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

Remarques :

- Lorsque $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Cette propriété permet, à partir de la formule explicite de déterminer la limite d'une suite géométrique.

Figure : Représentation graphique et limite de la suite $u_n = q^n$ en fonction de q



Exemple 1 :

- (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 3$.
- (v_n) définie par $v_1 = 3$ et $v_{n+1} = 0.8 \times v_n$.

3 - Somme des termes

Pour toute suite (u_n) on note S_n la somme de ses $n + 1$ premiers termes $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Propriété 3 : Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration : Montrons par récurrence la propriété P_n : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$

• **Initialisation** :

• **Hérédité** :

• **Conclusion** :

Propriété 4 :

- Si (u_n) est une suite arithmétique alors $S_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ (nombre de termes $\times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$)
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (premier terme $\times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$)

Attention : bien compter le nombre de termes. De u_3 à u_{10} il y a $10 - 3 + 1 = 8$ termes, pas 7.

Remarque : Si (u_n) est géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$.

Exemple 2 : On fait osciller un pendule au bout d'une ficelle de 50 cm. Les frottements de l'air ralentissent le pendule : on considère qu'à chaque balancement il parcourt une distance diminuée de 1 % par rapport au balancement précédent. Le pendule est lâché, écarté de sa position d'équilibre de sorte que la ficelle soit parallèle au sol. On note d_n la distance parcourue par le pendule lors du balancement numéro n (le premier balancement porte le numéro 0).

1) Justifier que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2) Calculer la distance totale parcourue par le pendule.