

Fiche A1.4 : Suites arithmétiques et géométriques

1 - Rappels

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$
Sens de variation	$r > 0$: croissante ; $r < 0$: décroissante ; $r = 0$: constante	Pour $u_0 > 0$ (on inverse pour $u_0 < 0$) : $q > 1$: croissante $0 < q < 1$: décroissante ; $q = 1$: constante ;

2 - Limites

Propriété 1 : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 .

- Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- Si $r = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

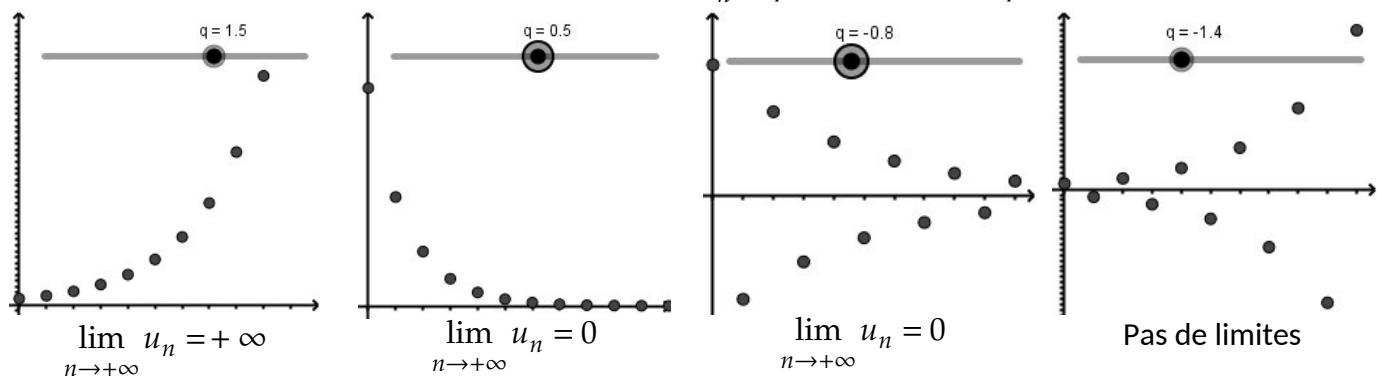
Propriété 2 : Soit q un nombre réel

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

Remarques :

- Lorsque $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Cette propriété permet, à partir de la formule explicite de déterminer la limite d'une suite géométrique.

Figure : Représentation graphique et limite de la suite $u_n = q^n$ en fonction de q



Exemple 1 :

- (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 3$. C'est une suite arithmétique de raison $r = -3 < 0$,

On a donc $u_n = 5 - 3n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

- (v_n) définie par $v_1 = 3$ et $v_{n+1} = 0.8 \times v_n$. C'est une suite géométrique de raison $q = 0.8$

$v_n = u_1 \times q^{n-1} = 3 \times 0.8^{n-1}$. Comme $-1 < 0.8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0.8^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

3 - Somme des termes

Pour toute suite (u_n) on note S_n la somme de ses $n + 1$ premiers termes $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Propriété 3 : Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration : Montrons par récurrence la propriété P_n : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$

• **Initialisation :** pour $n = 0$: à gauche 1 ; à droite $\frac{1-q^1}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$. Donc P_0 est vraie.

• **Hérédité :** soit $n \geq 0$ fixé. On suppose P_n vraie. Alors, en ajoutant q^{n+1} aux deux membres :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} : \text{c'est } P_{n+1}.$$

• **Conclusion :** par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. $\square$

Propriété 4 :

• Si (u_n) est une suite arithmétique alors $S_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ (nombre de termes $\times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$)

• Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (premier terme $\times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$)

Attention : bien compter le nombre de termes. De u_3 à u_{10} il y a $10 - 3 + 1 = 8$ termes, pas 7.

Remarque : Si (u_n) est géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$.

Exemple 2 : On fait osciller un pendule au bout d'une ficelle de 50 cm. Les frottements de l'air ralentissent le pendule : on considère qu'à chaque balancement il parcourt une distance diminuée de 1 % par rapport au balancement précédent. Le pendule est lâché, écarté de sa position d'équilibre de sorte que la ficelle soit parallèle au sol. On note d_n la distance parcourue par le pendule lors du balancement numéro n (le premier balancement porte le numéro 0).

1) Justifier que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

- Un balancement fait passer le pendule d'un côté à l'autre : il décrit un demi-cercle de rayon 50 cm (90° de descente puis 90° de montée ; en réalité un peu moins à cause des frottements...).

On a donc $d_0 = \pi \times 50 = 50\pi \approx 157,1$ cm.

- À chaque balancement, la distance diminue de 1 % : $d_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{100}\right) \times d_n = 0,99 \times d_n$.

La suite (d_n) est donc géométrique de raison $q = 0,99$ et de premier terme $d_0 = 50\pi$.

2) Calculer la distance totale parcourue par le pendule.

- On considère que le pendule oscille à l'infini (en réalité ce n'est pas le cas...)
- La distance parcourue après les balancements 0 à n est $S_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n$. D'après la propriété 4 :

$S_n = d_0 \times \frac{1-0,99^{n+1}}{1-0,99}$. Comme $-1 < 0,99 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,99^{n+1} = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{d_0}{1-q} = \frac{50\pi}{1-0,99} = \frac{50\pi}{0,01} = 5000\pi \approx 15\,708 \text{ cm, soit environ } 157 \text{ m.}$$