

Fiche ____ : Suites arithmético-géométriques

1 – Définition

Définition 1 :

Remarque : On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f : _____

Cas particuliers :

- Si $a = 0$: _____
- Si $a = 1$: _____
- Si $b = 0$: _____

Exemple 1 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout rang n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$.

- 1) Justifier que (u_n) est une suite arithmético-géométrique : _____
- 2) Déterminer la fonction f tel que $u_{n+1} = f(u_n)$: _____
- 3) Calculer les trois premiers termes de la suite.

$u_1 =$

$u_2 =$

$u_3 =$

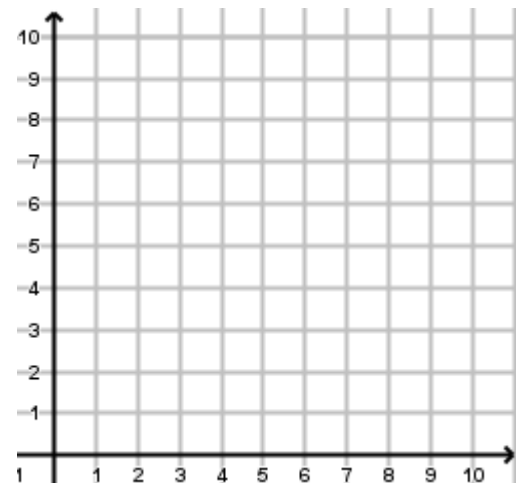
2 – Représentation graphique et limite

Exemple 2 : On reprend la suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$

- 1) Représenter graphiquement la suite (u_n)

- Etape 1 : On représente la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$
- Etape 2 : On trace la droite d'équation $y = x$
- Etape 3 : On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- Etape 4 : On utilise la courbe de f déterminer u_1 puis la droite d'équation $y = x$ pour le reporter sur l'axe des abscisses.
- Etape 5 : On réitère le procédé avec u_1 pour avoir u_2 , etc.

- 2) Conjecturer la limite de la suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$ (c'est l'abscisse du point d'intersection entre les droites)



Propriété 1 :

Remarque : Une suite arithmético-géométrique n'est pas toujours convergente. Cependant, lorsque c'est le cas, la limite correspond à l'abscisse du point d'intersection entre C_f et $y = x$.

Exemple 3 : On admet que la suite précédente est convergente. Déterminer alors sa limite L .



3 – Recherche de la formule explicite

Il est possible de trouver une formule explicite pour une suite arithmético-géométrique.

Exemple 4 : On reprend la suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$

- 1) Déterminer une suite constante (c_n) vérifiant pour tout rang n , $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + 5$.
- 2) Soit $v_n = u_n - 10$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son 1^{er} terme.
- 3) Déterminer la formule explicite de la suite (v_n)
- 4) En déduire la formule explicite de (u_n) .
- 5) Retrouver par le calcul, la limite de la suite (u_n) .

Remarque : De façon générale, si (c_n) est la suite constante solution de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - c_n$ est une suite géométrique de raison a .

En effet, $v_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1}$

$$= au_n + b - (ac_n + b)$$

$$= au_n + b - ac_n - b$$

$$= a(u_n - c_n)$$

$$= av_n.$$

Ainsi, en passant par la formule explicite de v_n , et en notant c la valeur de la suite constante solution, on obtient une formule explicite générale pour les suites arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$:

$$u_n = v_n + c_n = v_0 \times a^n + c = (u_0 - c) \times a^n + c$$

