

Fiche A1.4 : Suites arithmético-géométriques

1 – Définition

Définition 1 : Une suite est dite **arithmético-géométrique** si elle est définie pour tout rang n , par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux nombres réels.

Remarque : On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction affine $f(x) = ax + b$

Cas particuliers :

- Si $a = 0$, la suite est constante égale à b
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b
- Si $b = 0$, la suite est géométrique de raison a

Exemple 1 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout rang n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$.

- 1) Justifier que (u_n) est une suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a = 0.5$ et $b = 5$
- 2) Déterminer la fonction f tel que $u_{n+1} = f(u_n)$: f est la fonction affine $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$
- 3) Calculer les trois premiers termes de la suite.

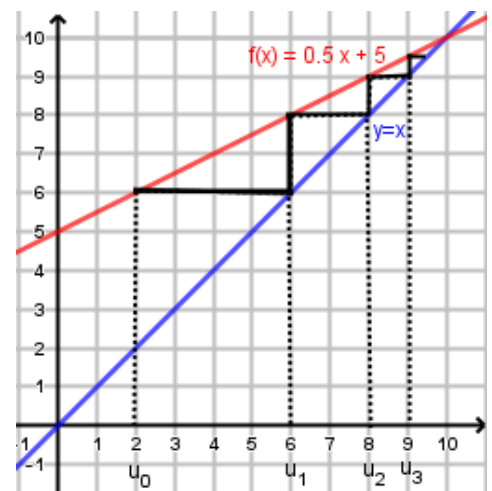
$$u_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + 5 = \frac{1}{2} \times 2 + 5 = 6 ; u_2 = \frac{1}{2} \times u_1 + 5 = \frac{1}{2} \times 6 + 5 = 8 ; u_3 = \frac{1}{2} \times u_2 + 5 = \frac{1}{2} \times 8 + 5 = 9$$

2 – Représentation graphique et limite

Exemple 2 : On reprend la suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$

- 1) Représenter graphiquement la suite (u_n)

- Etape 1 : On représente la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$
- Etape 2 : On trace la droite d'équation $y = x$
- Etape 3 : On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- Etape 4 : On utilise la courbe de f déterminer u_1 puis la droite d'équation $y = x$ pour le reporter sur l'axe des abscisses.
- Etape 5 : On réitère le procédé avec u_1 pour avoir u_2 , etc.



- 2) Conjecturer la limite de la suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$ (c'est l'abscisse du point d'intersection entre les droites)

Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite tel que $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers un nombre réel L alors on a $f(L) = L$

Remarque : Une suite arithmético-géométrique n'est pas toujours convergente. Cependant, lorsque c'est le cas, la limite correspond à l'abscisse du point d'intersection entre C_f et $y = x$.

Exemple 3 : On admet que la suite précédente est convergente. Déterminer alors sa limite L .

Si (u_n) converge vers L alors on a $f(L) = 0.5L + 5 = L$ soit $0.5L = 5$ d'où $L = 10$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$



3 – Recherche de la formule explicite

Il est possible de trouver une formule explicite pour une suite arithmético-géométrique.

Exemple 4 : On reprend la suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$

- 1) Déterminer une suite constante (c_n) vérifiant pour tout rang n , $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + 5$.

Si la suite (c_n) est constante, cela signifie que pour tout rang n , on a $c_{n+1} = c_n$.

Pour tout rang n , on a donc $\frac{1}{2}c_n + 5 = c_n$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}c_n = 5$ d'où $c_n = 10$.

La suite constante égale à 10 vérifie $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + 5$.

- 2) Soit $v_n = u_n - 10$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son 1^{er} terme.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = \frac{1}{2}u_n + 5 - 10 = \frac{1}{2}u_n - 5 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \times 10 = \frac{1}{2}(u_n - 10) = \frac{1}{2}v_n$$

Pour tout rang n , on a $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

$$v_0 = u_0 - 10 = 2 - 10 = -8$$

- 3) Déterminer la formule explicite de la suite (v_n)

$$\text{On a donc, pour tout rang } n, v_n = v_0 \times q^n = (-8) \times \frac{1}{2}^n$$

- 4) En déduire la formule explicite de (u_n) .

$$\text{Pour tout rang } n, \text{ on a } u_n = v_n + 10 = (-8) \times \frac{1}{2}^n + 10 = 10 - 8 \times 0.5^n$$

- 5) Retrouver par le calcul, la limite de la suite (u_n) .

$$\text{On sait que } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0.5^n = 0 \text{ car } 0 < 0.5 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10 - 8 \times 0 = 10$$

Remarque : De façon générale, si (c_n) est la suite constante solution de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - c_n$ est une suite géométrique de raison a .

En effet, $v_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1}$

$$= au_n + b - (ac_n + b)$$

$$= au_n + b - ac_n - b$$

$$= a(u_n - c_n)$$

$$= av_n.$$

Ainsi, en passant par la formule explicite de v_n , et en notant c la valeur de la suite constante solution, on obtient une formule explicite générale pour les suites arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$:

$$u_n = v_n + c_n = v_0 \times a^n + c = (u_0 - c) \times a^n + c$$

