

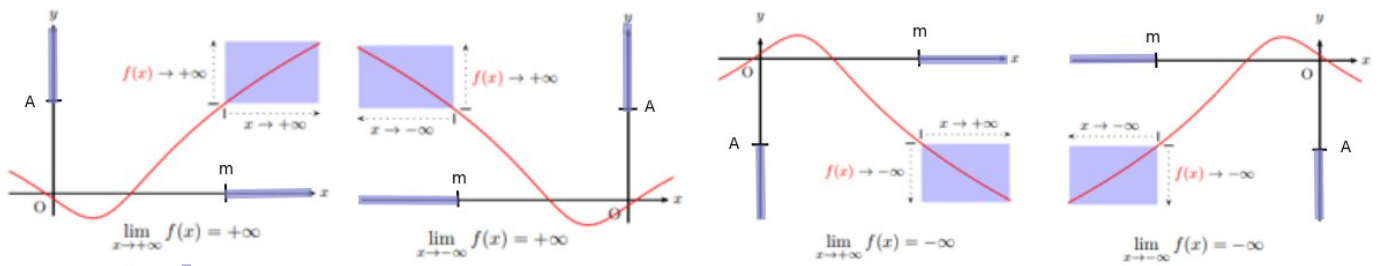
Fiche A2.1 : Limites en l'infini

1 - Limite infinie en l'infini

Définition 1 (limite infinie) : On dit qu'une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$, si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarques :

- Autrement dit, pour tout réel $A > 0$, il existe un réel m tel que, pour tout $x > m$, $f(x) > A$.
- Le **seuil** A , aussi grand qu'on le choisisse, peut toujours être dépassé, en prenant x suffisamment grand.
- On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, en remplaçant l'intervalle par $]-\infty; A[$.
- On définit de même les limites en $-\infty$ (« dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue »).



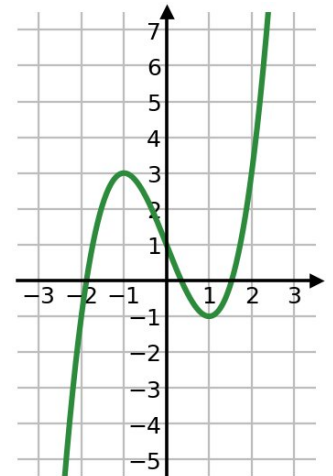
Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1) Compléter le tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice :

x	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3
$f(x)$						

2) Conjecturer graphiquement les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) À la calculatrice, trouver un réel m tel que, pour tout $x > m$, $f(x) > 10\,000$.



4) On donne la fonction Python ci-contre (algorithme de **seuil**).

a. Que renvoie `seuil(100000)` ?

b. Interpréter

Programme Python

```
def seuil(A):
    x=1
    while x**3-3*x+1<=A:
        x=x+1
    return x
```

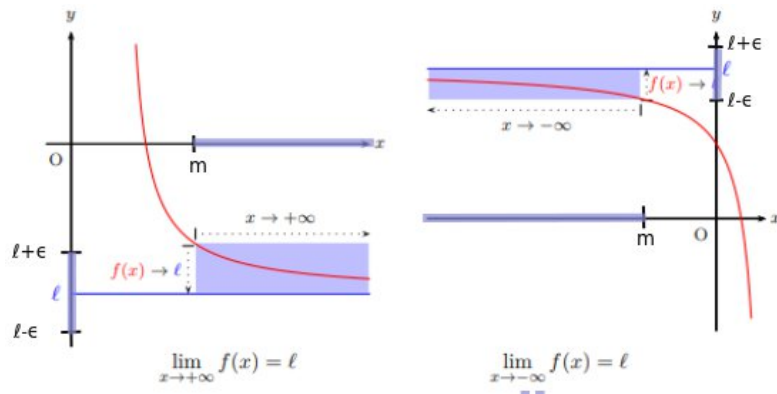
2 - Limite finie en l'infini

Définition 2 (limite finie) : Soit ℓ un réel. On dit que f a pour **limite** ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

La droite d'équation $y = \ell$ est alors appelée **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$.

Remarques :

- Autrement dit pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel m tel que, pour tout $x > m$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$
- La distance entre $f(x)$ et la limite ℓ , peut-être aussi petite que l'on veut, pour x pris suffisamment grand.
- On définit de même la limite ℓ en $-\infty$ et l'asymptote horizontale en $-\infty$.
- Graphiquement, la courbe de f se rapproche autant que l'on veut de la droite d'équation $y = \ell$.

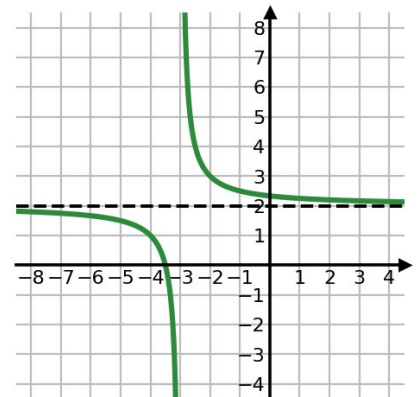


Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$.

1) Compléter le tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice :

x	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3
$f(x)$						

2) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement.



3) Vérifier que $f(x) - 2 = \frac{1}{x+3}$.

4) Trouver un réel m tel que, pour tout $x > m$, $f(x) \in]1,99 ; 2,01[$

5) Étudier la position de C_f par rapport à son asymptote horizontale.

Remarque : Une fonction n'a pas toujours une limite : $\cos$ et $\sin$ qui oscillent indéfiniment entre -1 et 1 .