

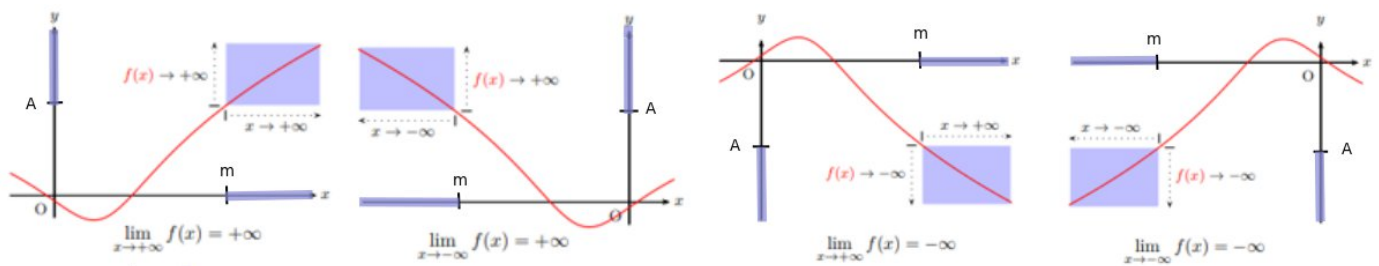
Fiche A2.1 : Limites en l'infini

1 - Limite infinie en l'infini

Définition 1 (limite infinie) : On dit qu'une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$, si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarques :

- Autrement dit, pour tout réel $A > 0$, il existe un réel m tel que, pour tout $x > m$, $f(x) > A$.
- Le **seuil** A , aussi grand qu'on le choisisse, peut toujours être dépassé, en prenant x suffisamment grand.
- On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, en remplaçant l'intervalle par $] -\infty; A[$.
- On définit de même les limites en $-\infty$ (« dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue »).



Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1) Compléter le tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice :

x	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3
$f(x)$	$\approx -10^9$	$-999\,699$	-969	971	$999\,701$	$\approx 10^9$

2) Conjecturer graphiquement les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3) À la calculatrice, trouver un réel m tel que, pour tout $x > m$, $f(x) > 10\,000$.

$f(21) = 9\,199$ et $f(22) = 10\,583$. Comme f est croissante sur $[1; +\infty[$, pour tout $x > 22$ on a $f(x) > 10\,000$: $m = 22$ convient.

4) On donne la fonction Python ci-contre (algorithme de **seuil**).

a. Que renvoie `seuil(100000)` ?

La fonction renvoie 47

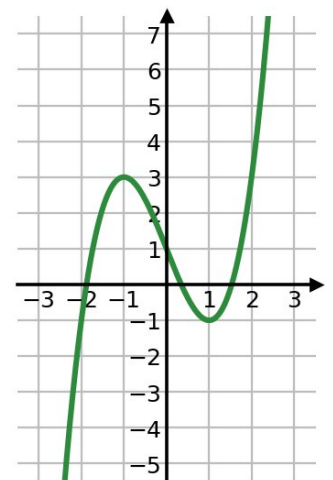
b. Interpréter

L'algorithme renvoie le premier entier x tel que $f(x) > 100\,000$.

A partir de $x = 47$, le seuil $10\,000$ est dépassé :

Pour $A = 100\,000$, il existe un $m = 47$ tel que pour tout $x > m$,

on a $f(x) > 10\,000$



Programme Python

```
def seuil(A):
    x=1
    while x**3-3*x+1<=A:
        x=x+1
    return x
```

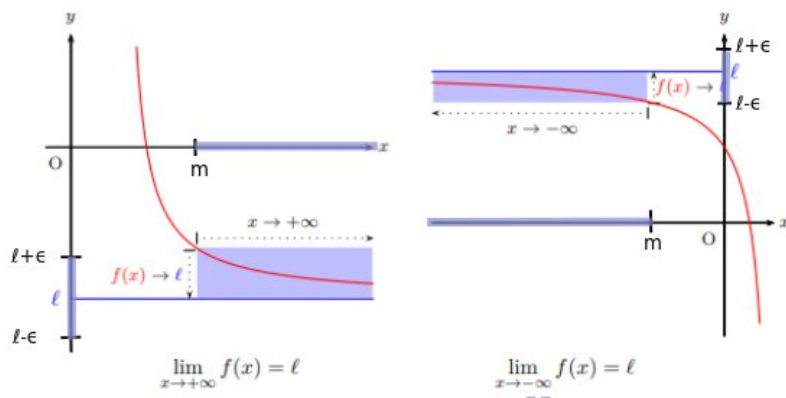
2 - Limite finie en l'infini

Définition 2 (limite finie) : Soit ℓ un réel. On dit que f a pour **limite ℓ en $+\infty$** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

La droite d'équation $y = \ell$ est alors appelée **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$.

Remarques :

- Autrement dit pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel m tel que, pour tout $x > m$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$
- La distance entre $f(x)$ et la limite ℓ , peut-être aussi petite que l'on veut, pour x pris suffisamment grand.
- On définit de même la limite ℓ en $-\infty$ et l'asymptote horizontale en $-\infty$.
- Graphiquement, la courbe de f se rapproche autant que l'on veut de la droite d'équation $y = \ell$.



Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$.

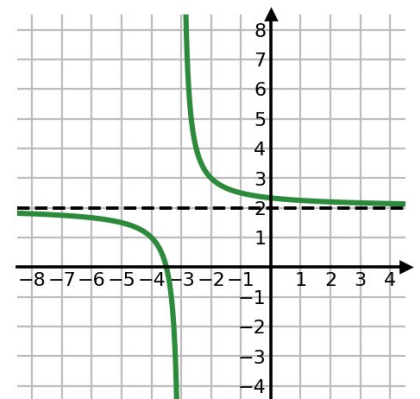
1) Compléter le tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice :

x	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3
$f(x)$	1,9990	1,9897	1,8571	2,0769	2,0097	2,0010

2) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 :$$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.



3) Vérifier que $f(x) - 2 = \frac{1}{x+3}$.

$$f(x) - 2 = \frac{2x+7}{x+3} - 2 = \frac{2x+7-2(x+3)}{x+3} = \frac{2x+7-2x-6}{x+3} = \frac{1}{x+3}.$$

4) Trouver un réel m tel que, pour tout $x > m$, $f(x) \in]1,99; 2,01[$

$$1,99 < f(x) < 2,01 \Leftrightarrow -0,01 < f(x) - 2 < 0,01 \Leftrightarrow -0,01 < \frac{1}{x+3} < 0,01$$

Pour $x > -3$: $x + 3 > 0$: Donc $0 < \frac{1}{x+3} < 0,01 \Leftrightarrow x + 3 > \frac{1}{0,01} = 100 \Leftrightarrow x > 97$. Donc $m = 97$ convient.

5) Étudier la position de C_f par rapport à son asymptote horizontale.

$f(x) - 2 = \frac{1}{x+3}$ est du signe de $x + 3$: strictement positif pour $x > -3$ et strictement négatif pour $x < -3$

C_f est **au-dessus** de la droite d'équation $y = 2$ sur $] -3; +\infty[$ et **en dessous** sur $] -\infty; -3[$.

On peut alors préciser $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2^+$ ($f(x) > 2$) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2^-$ ($f(x) < 2$)

Remarque : Une fonction n'a pas toujours une limite : cos et sin qui oscillent indéfiniment entre -1 et 1 .