

Fiche A2.2 : Limites en un point

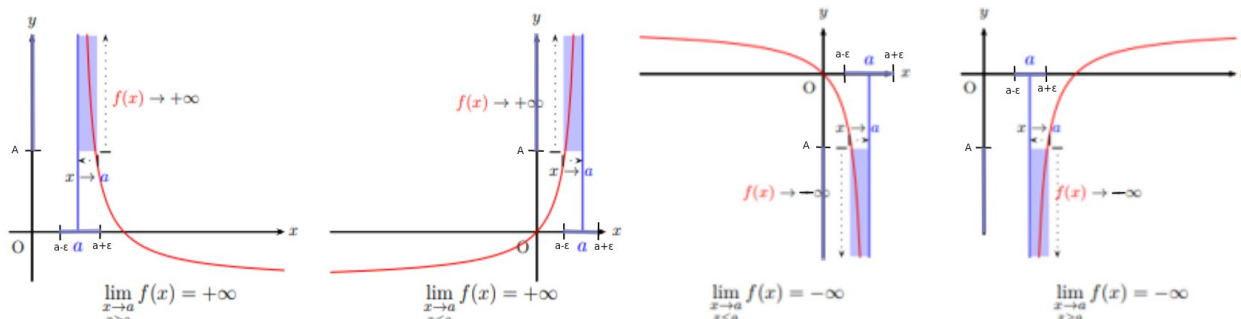
1 - Limite infinie en un point

Définition 1 (limite infinie) : Soit a un réel et f une fonction définie autour de a (mais pas forcément en a). On dit que f a pour **limite** $+\infty$ **en** a si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarques :

- Autrement dit, pour tout $A > 0$, il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x tel que $|x - a| < \epsilon$, $f(x) > A$.
- Aussi grand qu'on le prenne, le **seuil** A peut toujours être dépassé, pour x suffisamment proche de a .
- On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, en remplaçant l'intervalle par $]-\infty; A[$.
- Souvent, f ne se comporte pas de la même façon des deux côtés de a . On précise alors :
 - si x s'approche de a par valeurs **inférieures** ($x < a$) : **limite à gauche**, notée $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x < a} f(x)$;
 - si x s'approche de a par valeurs **supérieures** ($x > a$) : **limite à droite**, notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x > a} f(x)$.

Définition 2 : Si la limite de f en a (ou seulement à gauche, ou à droite de a) est $+\infty$ ou $-\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée **asymptote verticale** à la courbe de f .



Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3} = 2 + \frac{1}{x+3}$.

1) Conjecturer la limite de $f(x)$ en -3 . Interpréter.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty :$$

la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à C_f .

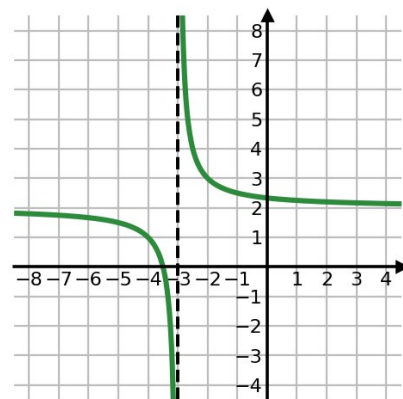
2) Compléter le tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice :

x	-3,1	-3,01	-3,001	-2,999	-2,99	-2,9
$f(x)$	-8	-98	-998	1 002	102	12

3) Pour quels réels $x > -3$ a-t-on $f(x) > 1\,000$?

$$\text{Pour } x > -3 : 2 + \frac{1}{x+3} > 1\,000 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} > 998 \Leftrightarrow 0 < x+3 < \frac{1}{998} \Leftrightarrow -3 < x < -3 + \frac{1}{998}$$

Donc $f(x) > 1\,000$ dès que x est assez proche de -3 à droite : $-3 < x < -3 + \frac{1}{998}$.



2 - Limite finie en un point

Définition 3 (limite finie) : Soit ℓ un réel. On dit que f a pour **limite ℓ en a** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Remarques :

- Pour les fonctions usuelles, lorsque f est définie en a , on a simplement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;
par exemple $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$. C'est la notion de **continuité** (fiche A2.4).
- Si les limites à gauche et à droite en a sont différentes, la fonction n'a pas de limite en a .
- Une fonction peut avoir une limite finie en un réel où elle n'est pas définie (exemple 2).

Exemple 2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Pour tout $x \neq 1$: $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$. Quand x se rapproche de 1, $x + 1$ se rapproche de 2 : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

La courbe de g est la droite d'équation $y = x + 1$ privée du point de coordonnées (1 ;2).

La courbe de g n'aura pas d'asymptote.