

Fiche A2.3 : Calcul de limites

1 - Limites usuelles et opérations

Propriété 1 (limites des fonctions de référence - voir les courbes en annexe) : Soit n un entier, $n \geq 1$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

- Les règles d'opérations sont les mêmes que pour les suites (fiche A1.3). Elles s'appliquent en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un réel a . Dans les tableaux, ℓ et ℓ' sont des réels et f, g deux fonctions.

Somme $f + g$

$\lim f$	$\lim g$	ℓ'	
		ℓ'	
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Produit $f \times g$

$\lim f$	$\lim g$	$\ell' \neq 0$	0	∞
		$\ell \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0
$\ell \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	0	$\pm \infty$
0	0	0	F.I.	F.I.
∞	$\pm \infty$	F.I.	$\pm \infty$	$\pm \infty$

Quotient f / g

$\lim f$	$\lim g$	$\ell' \neq 0$	0	∞
		$\ell \neq 0$	ℓ / ℓ'	$\pm \infty$
$\ell \neq 0$	ℓ / ℓ'	$\pm \infty$	0	0
0	0	F.I.	F.I.	0
∞	$\pm \infty$	$\pm \infty$	F.I.	F.I.

F.I. : forme indéterminée (on ne peut pas conclure directement).

$\pm \infty$: le signe s'obtient par la règle des signes ; pour un quotient dont le dénominateur tend vers 0, il faut connaître le signe du dénominateur (0^+ ou 0^-).

Exemple 1 : Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) \times \frac{1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$

a)

b)

c)

Méthode (lever une forme indéterminée « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ ») : on transforme l'expression.

- En $\pm \infty$: on **factorise par le terme prépondérant** (pour un polynôme : le terme de plus haut degré).
- En un réel a : on factorise puis on **simplifie**.

Exemple 2 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^2 - 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 5}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

a)

b)

c)

2 - Limite d'une fonction composée

Propriété 2 : Soient a, b, c des réels, $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = c$.

Exemple 3 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

a)

b)

c)

3 - Limites et comparaison

Théorème 1 (comparaison) : Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour x assez grand.

• Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. • Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 2 (des gendarmes) : Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$

(avec ℓ réel), alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

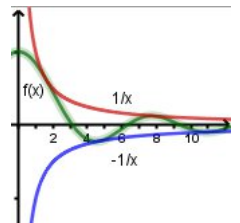
Remarque : Ces théorèmes s'adaptent aux limites en $-\infty$ et en un réel a .

Démonstration (théorème 1, premier point) : Soit A un réel. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a $f(x) > A$ dès que x est assez grand ; alors $g(x) \geq f(x) > A$. Tout intervalle $]A; +\infty[$ contient donc $g(x)$ pour x assez grand. $\square$

Exemple 4 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$

a)

b)



4 - Croissances comparées

Théorème 3 (C.C) : Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Remarque : On retient que « l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x ». Ce théorème permet de lever des formes indéterminées « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $0 \times \infty$ » (démonstration en annexe).

Exemple 5 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$

a)

b)