

Fiche A2.3 : Calcul de limites

1 - Limites usuelles et opérations

Propriété 1 (limites des fonctions de référence - voir les courbes en annexe) : Soit n un entier, $n \geq 1$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

- Les règles d'opérations sont les mêmes que pour les suites (fiche A1.3). Elles s'appliquent en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un réel a . Dans les tableaux, ℓ et ℓ' sont des réels et f, g deux fonctions.

Somme $f + g$				Produit $f \times g$				Quotient f / g			
$\lim f$	$\lim g$	ℓ'		$\lim f$	$\lim g$	$\ell' \neq 0$		$\lim f$	$\lim g$	$\ell' \neq 0$	
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$		$\ell \neq 0$	ℓ'	$\ell \times \ell'$		$\ell \neq 0$	ℓ'	ℓ / ℓ'	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		0	0	0		0	0	F.I.	
$-\infty$	$-\infty$	F.I.		∞	$\pm\infty$	F.I.		∞	$\pm\infty$	$\pm\infty$	

F.I. : forme indéterminée (on ne peut pas conclure directement).

$\pm\infty$: le signe s'obtient par la règle des signes ; pour un quotient dont le dénominateur tend vers 0, il faut connaître le signe du dénominateur (0^+ ou 0^-).

Exemple 1 : Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) \times \frac{1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) \times \frac{1}{x} = -\infty$.

c) Si $x > 3$, alors $x-3 > 0$: $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$. La droite $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe.

Méthode (lever une forme indéterminée « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ ») : on transforme l'expression.

- En $\pm\infty$: on **factorise par le terme prépondérant** (pour un polynôme : le terme de plus haut degré).

- En un réel a : on factorise puis on **simplifie**.

Exemple 2 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^2 - 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 5}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

a) F.I. « $-\infty + \infty$ ». Pour $x \neq 0$: $2x^3 + 4x^2 - 1 = x^3 \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = 2$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 4x^2 - 1) = -\infty$.

b) F.I. « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$: $\frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 5} = \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)} = \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^2}}$. Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1

donc, par quotient, la limite est 3 (asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$).

c) F.I. « $\frac{0}{0}$ ». $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ donc, pour $x \neq 2$, $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$.

2 - Limite d'une fonction composée

Propriété 2 : Soient a, b, c des réels, $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = c$.

Exemple 3 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

c) F.I. « $\infty - \infty$ ». Expression conjuguée : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Le dénominateur tend vers $+\infty$ (composition et somme) donc la limite est 0.

3 - Limites et comparaison

Théorème 1 (comparaison) : Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour x assez grand.

• Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. • Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 2 (des gendarmes) : Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$

(avec ℓ réel), alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

Remarque : Ces théorèmes s'adaptent aux limites en $-\infty$ et en un réel a .

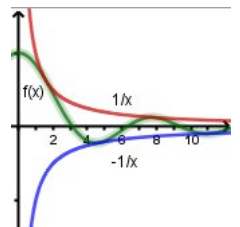
Démonstration (théorème 1, premier point) : Soit A un réel. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a $f(x) > A$ dès que x est assez grand ; alors $g(x) \geq f(x) > A$. Tout intervalle $]A; +\infty[$ contient donc $g(x)$ pour x assez grand. $\square$

Exemple 4 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$

a) Pour tout $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc,

d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

b) Pour tout réel x : $\cos x \geq -1$ donc $x + \cos x \geq x - 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x) = +\infty$.



4 - Croissances comparées

Théorème 3 (C.C) : Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Remarque : On retient que « l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x ». Ce théorème permet de lever des formes indéterminées « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $0 \times \infty$ » (démonstration en annexe).

Exemple 5 : Déterminer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$

a) F.I. « $\infty - \infty$ ». Pour $x \neq 0$: $e^x - x^2 = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (C.C). Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = +\infty$.

b) $(x^2 + 1)e^x = x^2 e^x + e^x$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ (C.C) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc, par somme, la limite est 0.