# Fiche A3.1 : La notion de continuité

## 1 – Continuité en un point, sur un intervalle

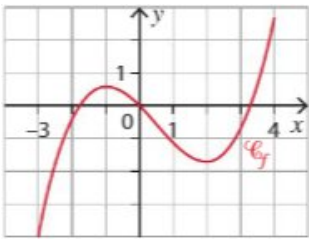
• Intuitivement, une fonction continue est une fonction dont la courbe se trace « sans lever le crayon », qui ne présente aucun « saut ». Pour formaliser cette idée, on utilise la notion de limite.

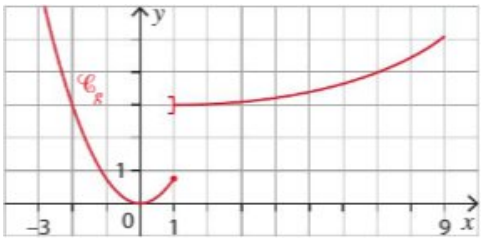
Définition 1 : Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un réel de $I$.

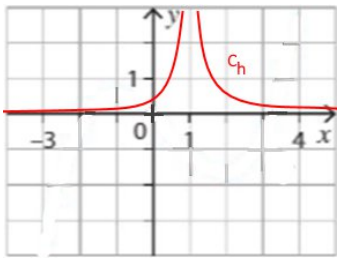
• $f$ est **continue en** $a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. • $f$ est **continue sur** $I$ si elle est continue en tout réel $a$ de $I$.

Remarques : Cela signifie que les limites à gauche et à droite de $f$ en $a$ sont toutes deux égales à $f(a)$.

Exemple 1 : Les fonctions $f$, $g$ et $h$ représentées ci-dessous sont-elles continues en $1$ ?

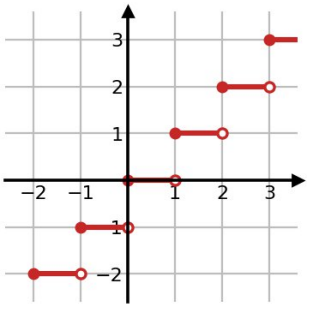



Exemple 2 (fonction partie entière) : La fonction $E$ associe à tout réel $x$ sa partie entière. Exemple : $E(2{,}7) = 2$ et $E(-0{,}5) = -1$. Est-elle continue en $1$ ?

Pour tout $x \in [0;1[$, $E(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} E(x) = 0$. Or $E(1) = 1$ : la limite à gauche n'est pas égale à $E(1)$, donc $E$ n'est **pas continue** en $1$. Plus généralement, $E$ est continue sur chaque intervalle $]n;n+1[$ ($n$ entier), où elle est constante.




## 2 – Continuité des fonctions usuelles

Propriété 1 (admise) : Sur tout intervalle où elles sont définies :

• Les fonctions de références (polynômes, exponentielles, racines, trigonométriques,...) sont continues.

• Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

Propriété 2 : Toute fonction **dérivable** sur un intervalle $I$ est **continue** sur $I$.

Démonstration : Soit $a \in I$. Pour tout $x \neq a$ de $I$ : $f(x) = f(a) + (x-a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme $f$ est dérivable en $a$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ ; de plus $\lim\limits_{x\to a} (x-a) = 0$. Aussi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) + 0 \times f'(a) = f(a)$ : $f$ est continue en $a$. □

Remarque : La réciproque de la propriété 2 est fausse : la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en $0$.

Convention : dans un tableau de variations, une flèche indique que la fonction est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle correspondant.