Fiche A3.1 : La notion de continuité

1 – Continuité en un point, sur un intervalle

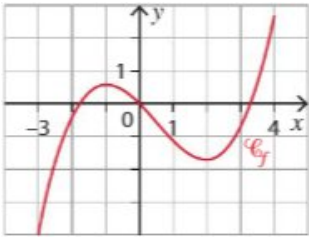
• Intuitivement, une fonction continue est une fonction dont la courbe se trace « sans lever le crayon », qui ne présente aucun « saut ». Pour formaliser cette idée, on utilise la notion de limite.

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

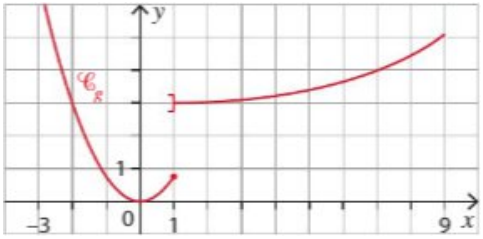
• f est **continue en** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. • f est **continue sur** I si elle est continue en tout réel a de I.

Remarques : Cela signifie que les limites à gauche et à droite de f en a sont toutes deux égales à $f(a)$.

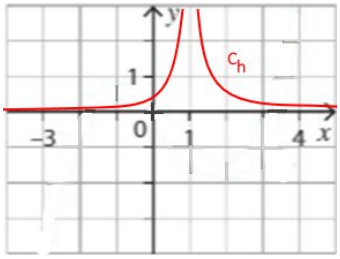
Exemple 1 : Les fonctions f, g et h représentées ci-dessous sont-elles continues en 1 ?



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$ et $f(1) = -1$: f est continue en 1.



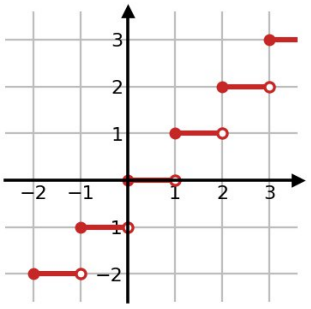
$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0{,}8$ mais $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 3$: g n'est **pas continue** en 1 (« saut »).



h n'est pas définie en 1 : elle ne peut pas être continue en 1.

Exemple 2 (fonction partie entière) : La fonction E associe à tout réel x sa partie entière. Exemple : $E(2{,}7) = 2$ et $E(-0{,}5) = -1$. Est-elle continue en 1 ?

Pour tout $x\in[0;1[$, $E(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} E(x) = 0$. Or $E(1) = 1$: la limite à gauche n'est pas égale à $E(1)$, donc E n'est **pas continue** en 1. Plus généralement, E est continue sur chaque intervalle $]n;n+1[$ (n entier), où elle est constante.



2 – Continuité des fonctions usuelles

Propriété 1 (admise) : Sur tout intervalle où elles sont définies :

• Les fonctions de références (polynômes, exponentielles, racines, trigonométriques,...) sont continues.

• Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

Propriété 2 : Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I.

Démonstration : Soit $a\in I$. Pour tout $x \neq a$ de I : $f(x) = f(a) + (x-a)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme f est dérivable en a, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$; de plus $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$. Aussi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) + 0\times f'(a) = f(a)$: f est continue en a. □

Remarque : La réciproque de la propriété 2 est fausse : la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Convention : dans un tableau de variations, une flèche indique que la fonction est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle correspondant.