

Fiche A3.1 : Principes de la dérivation

1 – Introduction : Qu'est ce que la dérivée ?

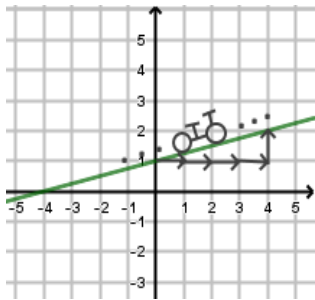


Fig 1 : Droite $y = \frac{1}{4}x + 1$

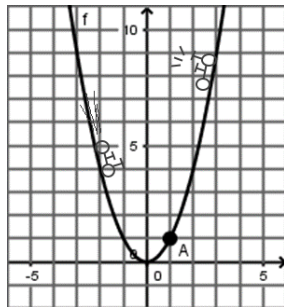


Fig 2 : Fonction carré

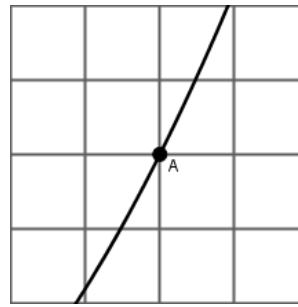


Fig 3 : Zoom $\times 20$ en A

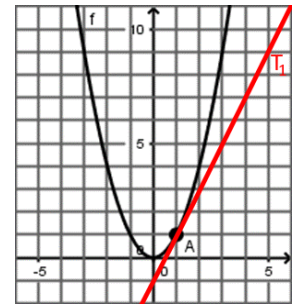
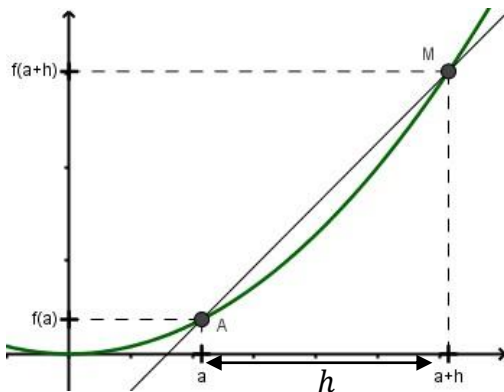


Fig 4 : Tangente en A

- La pente d'une droite est constante : Elle est donnée par son coefficient directeur.
- La pente d'une courbe, elle, évolue : Elle n'est pas la même en chaque point. On a donc besoin d'une fonction pour représenter cette pente pour chaque valeur de x : Cette fonction c'est la dérivée f' de f .
- Pour définir la pente d'une courbe en un point, on « zoome » la courbe à l'infini qui, « au voisinage » du point considéré, peut alors être assimilée à une droite, dont on pourra prendre la pente.
- Cette droite, prolongée au-delà du voisinage du point en question, correspond alors à ce que l'on appelle la tangente à la courbe de f en ce point : En résumé donc, $f'(x) = \text{pente de la tangente à la courbe en } x$.

Construction mathématique : On considère une fonction f définie sur un intervalle I et on s'intéresse à la pente de sa courbe au niveau d'un point A d'abscisse a .



➤ Etape 1 : Choix d'un pas et construction de la sécante.

- On choisit un pas $h > 0$.
- A partir du point A , on avance de ce pas h sur l'axe des abscisses. On obtient alors le point M de la courbe de f d'abscisse $a + h$.
- On peut donc considérer la droite (AM) appelée la sécante.

➤ Etape 2 : Taux d'accroissement entre A et M :

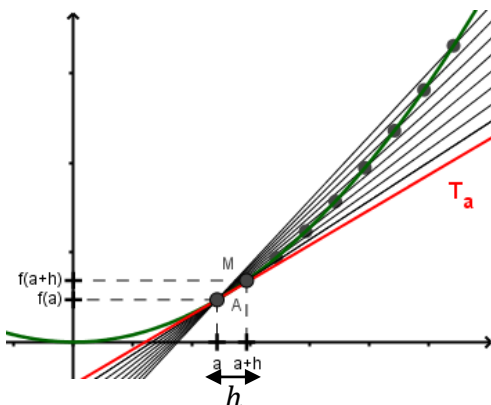
- On s'intéresse ensuite au taux d'accroissement entre a et $a + h$:

$$\tau = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- C'est le coefficient directeur de la sécante (AM)

➤ Etape 3 : On fait tendre h vers 0 : $h \rightarrow 0$

- Le point M se rapproche de A , et la sécante (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée tangente à la courbe de f en a .
- Le taux d'accroissement se rapproche donc d'une valeur limite qui coïncide avec la pente de la tangente : Cette valeur limite qui correspond au nombre dérivée $f'(a)$.



2 – Nombre dérivé

Définition 1 : On dit que f est **dérivable** en a , lorsque le taux d'accroissement $\tau = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivée de f en a** et est noté $f'(a)$. On écrit alors $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

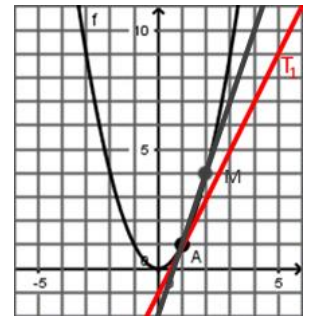
Définition 2 : On appelle **tangente à la courbe de f en a** et on note T_a la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de A .

Propriété 1 : Lorsque f est dérivable en a , $f'(a)$ coïncide avec le coefficient directeur de la tangente T_a .

Propriété 2 : Lorsque f est dérivable en a , la tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple 1 : Soit f la fonction carré et A le point de la courbe de f d'abscisse $a = 1$.

- f est dérivable en 1 : $\tau = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$ et $\lim_{h \rightarrow 0} 2+h = 2$. On a donc $f'(1) = 2$.
- La tangente T_1 est tracée : C'est la position limite de la sécante (AM) .
- Son coefficient directeur est bien égal à 2 : $f'(1) = \text{coefficient directeur de } T_1$
- T_1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1^2 = 1$ c'est-à-dire $y = 2(x - 1) + 1$ soit $y = 2x - 2 + 1$ d'où $y = 2x - 1$



$$f(x) = x^2$$

3 – Fonction dérivée

Définition 3 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I (i.e. pour tout a de I). On appelle **fonction dérivée de f** , la fonction notée f' définie sur I , qui à chaque nombre x de I , associe le nombre dérivée $f'(x)$.

Propriété 3 : Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I (La réciproque est fausse).

Propriété 4 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **positive** sur I .
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **négative** sur I .
- f admet un **extremum local** en a si et seulement si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple 2 : Réaliser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2$.

On commence par dériver la fonction f : $f'(x) = 3x^2 - 1.5 \times 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$

f' est un polynôme du second degré. Pour avoir son tableau de signe on doit d'abord trouver ses racines.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 81 ; x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-9}{6} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+9}{6} = 2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			5.5		-8	

$$f(-1) = (-1)^3 - 1.5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2 = 5.5$$

$$f(2) = (2)^3 - 1.5 \times (2)^2 - 6 \times 2 + 2 = -8$$

f admet un maximum local en -1 et un minimum local en 2 .

Remarque : La dérivation permet de résoudre des problèmes **d'optimisation**.

