

Fiche A3.2 : Formules de la dérivation

1 – Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de dérivabilité
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (avec n entier, $n \geq 2$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou $\mathbb{R}^*$)
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x $	$f'(x) = 1$ si $x > 0$ $f'(x) = -1$ si $x < 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou $\mathbb{R}^*$)
$f(x) = \exp(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Remarques :

- La fonction inverse n'est pas dérivable en 0, car elle n'est pas définie en ce nombre.
- La fonction racine carré n'est pas dérivable en 0, la tangente T_0 à sa courbe en 0 est verticale, et ne possède donc pas de coefficient directeur.
- La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, car elle n'admet pas de tangente T_0 .

2 – Dérivées et opérations

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I et k une constante réelle.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de dérivabilité
$f = u + v$	$f' = u' + v'$	I
$f = k \times u$	$f' = k \times u'$	I
$f = u \times v$	$f' = u'v + uv'$	I
$f = \frac{1}{v}$	$f' = -\frac{v'}{v^2}$	Pour tout x de I tel que $v(x) \neq 0$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	Pour tout x de I tel que $v(x) \neq 0$



3 – Dérivées et composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et g une fonction définie sur J

Définition 1 : On appelle **composée** de g et u , la fonction notée $g \circ u$ définie pour tout x de I par :

$$g \circ u(x) = g(u(x))$$

Remarques :

- Une fonction composée est construite en imbriquant une fonction u dans une autre fonction g .
- On a alors le schéma suivant qui donne les étapes de cette construction :

$$\begin{array}{ccccc} g \circ u : I & \xrightarrow{u} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ & & x \mapsto u(x) & \mapsto & g(u(x)) \end{array}$$

- Les fonctions $g \circ u$ et $u \circ g$ ne sont pas égales.

Exemple 1 : Soit $u(x) = 3x + 5$ et $g(x) = e^x$.

- $g \circ u(x) = g(u(x)) = e^{3x+5}$. On a $x \xrightarrow{u} 3x + 5 \xrightarrow{g} e^{3x+5}$
- $u \circ g(x) = u(g(x)) = 3e^x + 5$. On a $x \xrightarrow{g} e^x \xrightarrow{u} 3e^x + 5$

Propriété 1 : Si u est dérivable sur I et g est dérivable sur J , alors la composée de g et u est dérivable sur I et on a pour tout x de I on a donc $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$

Remarque : On obtient alors un autre tableau avec de nouvelles formules, en appliquant la propriété précédente avec pour g les fonctions $x \mapsto e^x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de dérivabilité
$f = e^u$	$f' = u'e^u$	I
$f = u^2$	$f' = 2u'u$	I
$f = u^n$	$f' = u' \times nu^{n-1}$	I
$f = \sqrt{u}$	$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Pour tout x de I tel que $v(x) > 0$
$f = \cos(u)$	$f' = -u'\sin(u)$	I
$f = \sin(u)$	$f' = u'\cos(u)$	I

Exemple 2 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = e^{3-2x}$: $f = e^u$ avec $u(x) = 3 - 2x$ et $u'(x) = -2$ donc $f'(x) = -2e^{3-2x}$
- $f(x) = e^{x^2+3x+5}$: $f = e^u$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 5$ et $u'(x) = 2x + 3$ donc $f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x+5}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$: $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$ donc $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- $f(x) = \cos^2(x)$: $f = u^2$ avec $u(x) = \cos(x)$ et $u'(x) = -\sin(x)$ donc $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$
- $f(x) = \cos(x^2)$: $f = \cos(u)$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$ donc $f'(x) = -2x\sin(x^2)$
- $f(x) = (2x+1)^3$: $f = u^3$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $u'(x) = 2$ donc $f'(x) = 2 \times 3 \times (2x + 1)^2$
d'où $f'(x) = 6(2x + 1)^2$

