

Fiche A3.2 : Théorème des valeurs intermédiaires

1 - Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

Théorème 1 (T.V.I.) : Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** réel c de $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques :

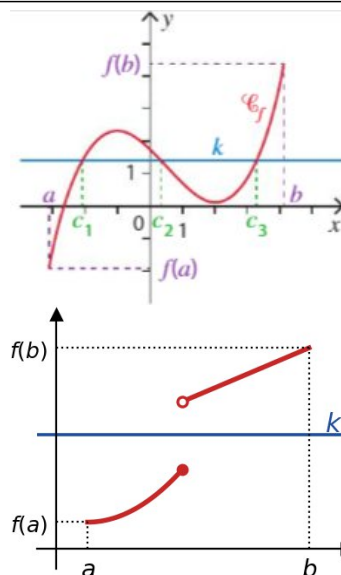
- Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) nous dit en quelque sorte que pour une fonction **continue**, lorsque x varie entre a et b , $f(x)$ passe nécessairement par toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

- L'équation $f(x) = k$ admet alors une ou plusieurs solutions dans $[a;b]$.

Sur la première figure, k a trois antécédents : $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = k$.

- Le théorème précédent fonctionne avec $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ou $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- L'hypothèse de **continuité** est indispensable : sur la seconde figure, f n'est pas continue et le réel k n'a aucun antécédent.

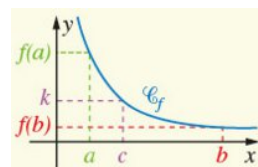


Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1;3]$.

- f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $[-1;3]$.
- $f(-1) = -1 - 3 + 2 = -2$ et $f(3) = 27 - 27 + 2 = 2$: le réel 0 est compris entre $f(-1)$ et $f(3)$.
- D'après le T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans cet intervalle.

2 - Cas des fonctions strictement monotones

Théorème 2 (corollaire du T.V.I.) : Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a;b]$.



Démonstration : L'existence d'une solution est donnée par le T.V.I. Pour l'unicité, supposons f strictement croissante et soient $c < c'$ deux réels de $[a;b]$: alors $f(c) < f(c')$, donc c et c' ne peuvent pas être tous les deux solutions de $f(x) = k$. Le raisonnement est analogue si f est strictement décroissante. $\square$

Remarque : Le théorème s'étend aux intervalles ouverts ou non bornés ($[a;b[$, $]a; +\infty[$, $\mathbb{R}$...) : on remplace alors $f(a)$ ou $f(b)$ par la **limite** de f à la borne correspondante.

Méthode : Pour montrer que $f(x) = k$ admet une unique solution α dans un intervalle I , on vérifie :

- ① f est continue sur I ;
- ② f est strictement monotone sur I ;
- ③ k est compris entre les images (ou les limites) de f aux bornes de I .

Remarque : On peut ensuite encadrer α à la calculatrice.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

① f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

② $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

③ Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : 0 \in]-\infty; +\infty[$.

D'après le corollaire du T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01 (méthode par **balayage** : table de la calculatrice).

x	$f(x)$
0	-1
1	1

pas 1 : $0 < \alpha < 1$

x	$f(x)$
0,6	$\approx -0,184$
0,7	$\approx 0,043$

pas 0,1 : $0,6 < \alpha < 0,7$

x	$f(x)$
0,68	$\approx -0,006$
0,69	$\approx 0,019$

pas 0,01 : $0,68 < \alpha < 0,69$

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\alpha) = 0 : f(x) < 0$ si $x < \alpha$; $f(x) > 0$ si $x > \alpha$.

Exemple 3 : Soit f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de variations (avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$). Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$, puis de l'équation $f(x) = 0$.

• Sur $]-\infty; -4]$, f est continue et strictement décroissante, et $1 \in]-8; 2]$: l'équation $f(x) = 1$ y admet une unique solution. De même sur $[-4; 7]$ (car $1 \in]-8; 8]$) et $[7; +\infty[$ (car $1 \in]0; 8]$). L'équation $f(x) = 1$ a donc **3 solutions**.

• $f(x) = 0$ a une solution dans $]-\infty; -4]$, une dans $[-4; 7]$, mais aucune dans $[7; +\infty[$ où $f(x) > 0$: **2 solutions**.

x	$-\infty$	-4	7	$+\infty$
$f(x)$	2	-8	8	0

3 - Algorithme de dichotomie

Principe : f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires : l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[a; b]$. On calcule le milieu $m = \frac{a+b}{2}$: si $f(a) \times f(m) \leq 0$, alors $\alpha \in [a; m]$; sinon $\alpha \in [m; b]$. On recommence avec ce nouvel intervalle, **deux fois plus petit**, jusqu'à obtenir l'amplitude voulue. Après n étapes, l'amplitude de l'intervalle vaut $\frac{b-a}{2^n}$.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Exemple 4 : On reprend $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0; 1]$, avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Compléter le tableau des premières étapes, puis donner le nombre d'étapes nécessaires pour avoir une amplitude inférieure à 0,01.

Étape	a	b	m	Signe de $f(m)$	Nouvel intervalle
1	0	1	0,5	-	$[0,5; 1]$
2	0,5	1	0,75	+	$[0,5; 0,75]$
3	0,5	0,75	0,625	-	$[0,625; 0,75]$
4	0,625	0,75	0,6875	+	$[0,625; 0,6875]$

Après n étapes, l'amplitude est $\frac{1}{2^n}$. Or $\frac{1}{2^6} \approx 0,016$ et $\frac{1}{2^7} \approx 0,008 < 0,01$: il faut 7 étapes.

L'appel `dichotomie(f, 0, 1, 0.01)` renvoie $(0,6796875; 0,6875)$: ainsi $0,679 < \alpha < 0,688$.