

Fiche A3.3 : Applications aux suites

1 - Image d'une suite convergente

Propriété 1 : Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I . Si (u_n) converge vers un réel ℓ **appartenant** à I , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Exemple 1 : Déterminer la limite des suites définies pour $n \geq 1$ par $v_n = \sqrt{4 + \frac{1}{n}}$ et $w_n = e^{\frac{1-n}{2n}}$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4$ et la fonction racine carrée est continue en 4, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{4} = 2$.
- $\frac{1-n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$ tend vers $-\frac{1}{2}$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = e^{-\frac{1}{2}}$.

2 - Suites définies par une relation de récurrence

Théorème (du point fixe) : Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que, pour tout entier n , $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à I , **alors** ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. D'autre part, f est continue en ℓ donc, d'après la propriété 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$. $\square$

Vocabulaire : Un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ est appelé **point fixe** de f . Graphiquement, c'est l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Point de vigilance : ce théorème ne prouve **pas** que la suite converge. Il faut d'abord établir la convergence (le plus souvent : suite monotone et bornée, fiche A1.2) ; il donne ensuite les valeurs possibles de la limite.

Méthode (étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$) :

1. Montrer par récurrence un encadrement du type $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq b$, avec les variations de f sur $[a;b]$.
2. En déduire que (u_n) converge vers un réel $\ell \in [a;b]$ (suite monotone et bornée).
3. Comme f est continue sur $[a;b]$, résoudre $f(\ell) = \ell$ et ne garder que les solutions appartenant à $[a;b]$.

Remarque : Dans l'exemple 5 de la fiche A1.2 ($u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$), on savait seulement que (u_n) converge.

La fonction $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite vérifie $\ell = \frac{1+\ell}{2}$, d'où $2\ell = \ell + 1$ puis $\ell = 1$.

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

1) A l'aide du graphique conjecturer la limite de la suite (u_n)

$u_0 = 0$ puis $u_1 = f(0) = \sqrt{2} \approx 1.41$. On utilise la droite $y = x$ pour placer u_1 sur l'axe des abscisses.

Puis $u_2 = f(\sqrt{2}) \approx 1.85$. De même, on utilise la droite $y = x$ pour placer u_2 sur l'axe des abscisses.

Ainsi de suite on peut conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

2) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;2]$

On calcule la dérivée de $f : f = \sqrt{u}$ donc $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. On a donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

f' est positive sur son ensemble de définition donc f est croissante sur $[0;2]$

3) Montrer par récurrence la propriété $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

La fonction f est croissante sur $[0;2]$ (comme la fonction racine carrée).

- Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,41$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$.

- Hérédité : supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ pour un entier n fixé.

Comme f est croissante sur $[0;2]$: $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$,

soit $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$. Donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

On a donc $P(n+1)$

- Conclusion : pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

4) En déduire que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge vers un réel ℓ , et $0 \leq \ell \leq 2$.

5) Déterminer la limite ℓ .

f est continue sur $[0;2]$ et $\ell \in [0;2]$ donc $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\sqrt{\ell + 2} = \ell$.

En élevant au carré : $\ell + 2 = \ell^2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$.

$\Delta = 9$: les solutions sont 2 et -1 . Comme $\ell \geq 0$, on conclut : $\ell = 2$.

