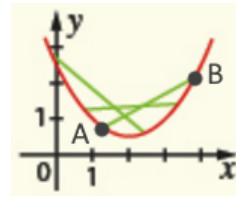


Fiche A3.3 : Convexité

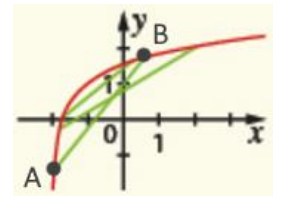
1 – Fonction convexes et concaves et point d'inflexion

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On note C_f sa courbe représentative.

- On dit que f est **convexe** sur I si pour tout point A et B de C_f , sa courbe est située en-dessous de la sécante $[AB]$.
- On dit que f est **concave** sur I si pour tout point A et B de C_f , sa courbe est située au-dessus de la sécante $[AB]$.



Convexe

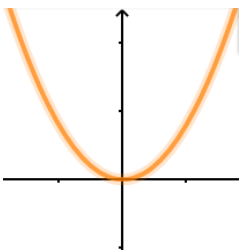


Concave

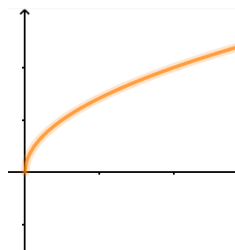
Vocabulaire : Etudier la **convexité** d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est convexe et ceux sur lesquels elle est concave

Exemple 1 : Déterminer la convexité des fonctions de références ci-dessous.

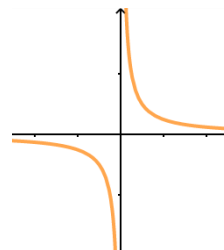
Fonction carré

Convexe sur $\mathbb{R}$

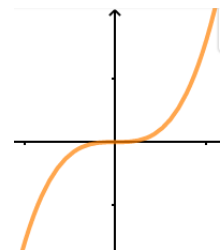
Fonction racine carré

Concave sur $\mathbb{R}$

Fonction inverse

Concave sur $] -\infty; 0[$
Convexe sur $]0; +\infty[$

Fonction cube

Concave sur $] -\infty; 0[$
Convexe sur $]0; +\infty[$

Remarque : Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

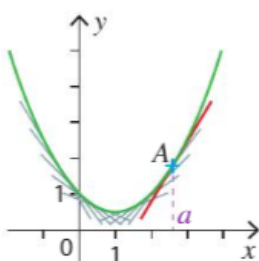
Définition 2 : Un **point d'inflexion** est un point de la courbe où s'opère un changement de convexité.

Exemple 2 : L'origine du repère est un point d'inflexion pour la fonction cube

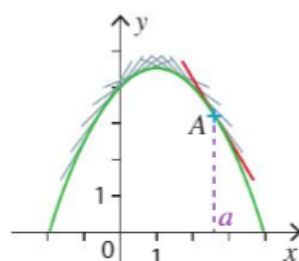
2 – Convexité et tangente

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note C_f sa courbe représentative.

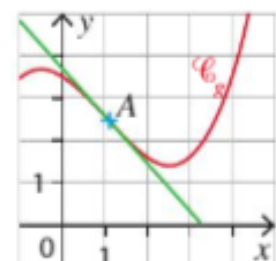
- f est **convexe** sur I si et seulement si C_f est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cette intervalle.
- f est **concave** sur I si et seulement si C_f est située en-dessous de toutes ses tangentes sur cette intervalle.
- f admet un **point d'inflexion** en A si C_f admet une tangente en A et qu'elle la traverse en ce point.



La fonction est convexe.



La fonction est concave.

 A est un point d'inflexion.

3 – Convexité et dérivée

Définition 3 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est aussi dérivable sur I . On appelle **dérivée seconde** de f et on note f'' , la dérivée de la dérivée f' de f .

Vocabulaire : On dit alors que la fonction f est deux-fois dérivable

Exemple 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5 + e^x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et on a $f'(x) = 6x + e^x$

f' est de nouveau dérivable sur $\mathbb{R}$ et la dérivée seconde est donnée par $f''(x) = (f')'(x) = 6 + e^x$

Propriété 2 : Soit f une fonction deux-fois dérivable sur un intervalle I . On a les équivalences suivantes

- f est **convexe** sur $I \Leftrightarrow f'$ est **croissante** sur $I \Leftrightarrow f''$ est **positive** sur I
- f est **concave** sur $I \Leftrightarrow f'$ est **décroissante** sur $I \Leftrightarrow f''$ est **négative** sur I

Remarque : Pour étudier la convexité d'une fonction f , il suffit donc d'étudier le signe de sa dérivée seconde.

Exemple 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

1) Calculer sa dérivée f' puis sa dérivée seconde f''

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f''(x) = 2x - 2$

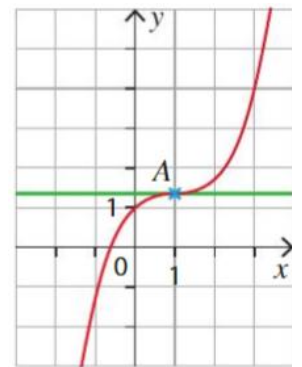
2) Etudier la convexité de la fonction f .

f'' est une fonction affine avec un coefficient directeur > 0

C'est une droite qui monte donc elle est d'abord « - » puis « + »

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ donc f'' s'annule en $x = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de f''	-	0	+
Convexité de f	Concave		Convexe



Propriété 3 : Soit f une fonction deux-fois dérivable sur un intervalle I . On a les équivalences suivantes :
 f admet un point d'inflexion en $a \Leftrightarrow f'$ change de variation en $a \Leftrightarrow f''$ s'annule en a en changeant de signe.

Exemple 4 (Suite) :

3) Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de la fonction f .

La fonction f admet un point d'inflexion en $x = 1$ car $f''(1) = 0$ en changeant de signe.

Remarque : La condition seule f'' s'annule en a n'est pas suffisante pour garantir un point d'inflexion

Contre-Exemple : $f(x) = x^4$.

On a $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$.

f'' s'annule en 0 mais reste toujours positive.

f n'admet pas de point d'inflexion en 0

