

Fiche C1.1 : L'ensemble des nombres complexes

1 - L'ensemble $\mathbb{C}$

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution : le carré d'un nombre réel est toujours positif.
- Au XVI^e siècle, pour résoudre des équations de degré 3, les mathématiciens italiens (Cardan, Bombelli) ont eu l'idée d'introduire un nombre « imaginaire » de carré -1 et de **calculer avec lui comme avec un réel**.

Théorème (admis) : Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, qui contient $\mathbb{R}$ et un élément noté $i \notin \mathbb{R}$ tel que $i^2 = -1$, et qui est muni d'une addition et d'une multiplication prolongeant celles de $\mathbb{R}$, avec les **mêmes règles de calcul**.

Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Remarques :

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: tout réel a est un nombre complexe, à savoir $a + 0i$.
- Il n'existe **pas d'ordre** dans $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations : écrire $z < z'$ ou « z est positif » n'a **aucun sens** pour des nombres complexes non réels. Par exemple, i n'est ni positif ni négatif (son carré vaut -1).

Définition 1 : L'écriture $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) est appelée **forme algébrique** de z .

- Le réel a est la **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$.
- Le réel b est la **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$.

Exemple 1 : Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 7$ et $z_4 = 2i - 4$.

- $z_1 = 3 + (-5)i$: $\text{Re}(z_1) = 3$ et $\text{Im}(z_1) = -5$.
- $z_2 = 0 + (-1)i$: $\text{Re}(z_2) = 0$ et $\text{Im}(z_2) = -1$.
- $z_3 = 7 + 0i$: $\text{Re}(z_3) = 7$ et $\text{Im}(z_3) = 0$.
- $z_4 = -4 + 2i$, donc $\text{Re}(z_4) = -4$ et $\text{Im}(z_4) = 2$.

Remarques :

- Si $\text{Im}(z) = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$: le nombre z est donc **réel**.
- Si $\text{Re}(z) = 0$, alors $z = ib$: on dit que z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- On a donc $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

Exemple 2 : Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le nombre $z = (m^2 - 4) + (m + 1)i$ est-il réel ? imaginaire pur ?

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$; on a alors $z = (-1)^2 - 4 = -3$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ ou $m = -2$; on a alors $z = 3i$ ou $z = -i$.

Propriété 1 (puissances de i) : $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; puis les valeurs se répètent : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i^{n+4} = i^n$.

Démonstration : $i^3 = i^2 \times i = -i$ et $i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i^{n+4} = i^n \times i^4 = i^n$. $\square$

Point de vigilance : le symbole $\sqrt{}$ est **réserve aux réels positifs** : on n'écrit jamais « $i = \sqrt{-1}$ ».

Sinon la règle $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ donnerait $-1 = i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Méthode : Pour calculer i^n , on effectue la division euclidienne de n par 4 : si $n = 4q + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$, alors $i^n = (i^4)^q \times i^r = i^r$.

Exemple 3 : Calculer i^{2026} : $2026 = 4 \times 506 + 2$ donc $i^{2026} = (i^4)^{506} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$.

2 - Égalité de deux nombres complexes

Propriété 2 : Deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a', b' réels sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Remarque : Cette propriété (qui traduit l'**unicité** de la forme algébrique) permet de remplacer une égalité dans $\mathbb{C}$ par un **système de deux équations** dans $\mathbb{R}$: on dit que l'on **identifie** les parties réelles et les parties imaginaires.

Démonstration :

($\Leftarrow$) Si $a = a'$ et $b = b'$, alors $a + ib = a' + ib'$.

($\Rightarrow$) Réciproquement, si $a + ib = a' + ib'$, alors $a - a' = i(b' - b)$. Supposons par l'absurde que $b \neq b'$: Alors $i = \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$. car a, b, a', b' sont réels, ce qui est absurde. Donc $b = b'$, puis $a - a' = 0$, soit $a = a'$. $\square$

Corollaire (conséquences de l'égalité dans $\mathbb{C}$) : Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a', b' réels :

$$\bullet z \neq z' \Leftrightarrow a \neq a' \text{ ou } b \neq b' \quad \bullet z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0 \quad \bullet z \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

Méthode (résoudre une équation d'inconnue complexe z par **identification**) :

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y **réels**.
2. On remplace dans l'équation et on met chaque membre sous forme algébrique.
3. On identifie parties réelles et parties imaginaires : on obtient un **système** de deux équations réelles.
4. On le résout et on conclut.

Exemple 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + 3i = iz + 5$.

• On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

• Alors $2z + 3i = 2(x + iy) + 3i = 2x + 2iy + 3i = 2x + i(2y + 3)$

Et, $iz + 5 = i(x + iy) + 5 = ix + i^2y + 5 = ix - y + 5 = (5 - y) + ix$.

• Par identification : $2x + i(2y + 3) = (5 - y) + ix \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 - y \\ 2y + 3 = x \end{cases}$

On remplace x par $2y + 3$ dans la 1ère équation : $2(2y + 3) = 5 - y \Leftrightarrow 4y + 6 = 5 - y$, soit $5y = -1$, d'où $y = -\frac{1}{5}$.

Puis $x = 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 3 = \frac{-2}{5} + \frac{15}{5} = \frac{13}{5}$.

• Conclusion : l'équation admet une unique solution, $z = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}i$.