

Fiche C1.2 : Calcul dans $\mathbb{C}$

1 - Opérations dans $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{C}$, on calcule **comme dans** $\mathbb{R}$ (distributivité, identités remarquables...) avec en plus la règle : $i^2 = -1$.
Un résultat se donne toujours sous forme algébrique.

Propriété 1 : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (a, b, a', b' réels).

$$\bullet z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \bullet -z = -a - ib \quad \bullet z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Démonstration : $z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$. $\square$

Exemple 1 : Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = 1 - i$. Calculer $z + z'$, $z - z'$, $z \times z'$ et z^2 .

$$\begin{aligned} \bullet z + z' &= (2 + 1) + (3 - 1)i = 3 + 2i; & \bullet z - z' &= (2 - 1) + (3 - (-1))i = 1 + 4i; \\ \bullet z \times z' &= (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i. \\ \bullet z^2 &= (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i \quad (\text{identité remarquable}). \end{aligned}$$

Point de vigilance : $(3i)^2 = 9i^2 = -9$ et non 9 ; de même $(a + ib)^2 = a^2 + 2aib - b^2$ (et non $+ b^2$)

Exemple 2 (à retenir) : $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ et $(1 - i)^2 = -2i$. On en déduit $(1 + i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

2 - Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1 : Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exemple 3 : $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$; $\overline{-i} = i$; $\overline{5} = 5$; $\overline{-1 - 4i} = -1 + 4i$.

Exemple 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + \overline{z} = 6 + 3i$.

- On pose $z = x + iy$ avec x, y réels ; alors $\overline{z} = x - iy$ et $2z + \overline{z} = 2x + 2iy + x - iy = 3x + iy$.
- L'équation s'écrit $3x + iy = 6 + 3i$; par identification, $3x = 6$ et $y = 3$: l'unique solution est $z = 2 + 3i$.

Propriété 2 : Pour tout nombre complexe $z = a + ib$:

$$\begin{aligned} \bullet \overline{\overline{z}} &= z; & \bullet z + \overline{z} &= 2\operatorname{Re}(z) & \bullet z - \overline{z} &= 2i\operatorname{Im}(z). \\ \bullet z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = z & \bullet z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = -z. & \bullet z \overline{z} &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \bullet \overline{\overline{z}} &= \overline{a - ib} = a + ib = z; \quad z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z); \quad z - \overline{z} = a + ib - a - ib = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z) \\ \bullet \overline{z} = z &\Leftrightarrow a - ib = a + ib \Leftrightarrow -b = b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}; \quad \overline{z} = -z \Leftrightarrow a - ib = -a - ib \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}. \\ \bullet z \overline{z} &= (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2 \quad \square \end{aligned}$$

Propriété 3 : Pour tous nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ et pour tout entier naturel n :

$$\bullet \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \bullet \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad \bullet \overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \bullet \text{si } z' \neq 0, \left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

Démonstration : Pour chacune des ces formules, on calcule les deux membres de l'égalité puis on procède par identification. La formule $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ se montre par récurrence après avoir établi le produit.

3 - Inverse et quotient

Propriété 4 : Tout nombre complexe $z = a + ib$ **non nul** admet un inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Démonstration : Si $z \neq 0$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2 \neq 0$ et $z \times \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{z\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$. $\square$

Méthode : Pour écrire un quotient $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, on **multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $\overline{z'}$ du dénominateur** : le nouveau dénominateur $z'\overline{z'} = a'^2 + b'^2$ est un réel.

Exemple 5 : Écrire sous forme algébrique $\frac{1}{2+i}$ et $\frac{3+i}{1-2i}$.

- $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2+1^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.
- $\frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+i+2i^2}{1^2+2^2} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$.

Exemple 6 (équation $az = b$) : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)z = 3-i$.

Comme $1+i \neq 0$, on peut diviser : $z = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$.

4 - Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

Rappels : $\binom{n}{k}$, avec $0 \leq k \leq n$, est appelé le coefficient binomial :

- Le coefficient binomial peut se lire dans le **triangle de Pascal**
- On a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- On a la **relation de Pascal** : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
- On a aussi la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Propriété 5 (formule du binôme de Newton) : Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + a^n.$$

Démonstration : Par récurrence sur n , la propriété P_n : « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ »

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$: P_0 est vraie.

• **Hérédité** : soit $n \geq 0$ fixé, on suppose P_n vraie.

$$\text{Alors } (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

$$\text{Avec } j = k+1 \text{ c'est à dire } k = j-1, \text{ la 1ère somme s'écrit } \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + a^{n+1}$$

La 2ème somme s'écrit $b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$. On regroupe puis grâce à la relation de Pascal, on obtient :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}. \text{ C'est } P_{n+1}.$$

• **Conclusion** : par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemple 7 : Calculer $(1+2i)^3$ et $(1-i)^5$ avec la formule du binôme.

- $(1+2i)^3 = \binom{3}{0} 1^3 (2i)^0 + \binom{3}{1} 1^2 (2i)^1 + \binom{3}{2} 1^1 (2i)^2 + \binom{3}{3} 1^0 (2i)^3$
 $= 1^3 + 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 1 \times (2i)^2 + (2i)^3 = 1 + 6i + 3 \times 4i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i.$
- $(1-i)^5 = \binom{5}{0} 1^5 (-i)^0 - \binom{5}{1} 1^4 (i)^1 + \binom{5}{2} 1^3 (i)^2 - \binom{5}{3} 1^2 (i)^3 + \binom{5}{4} 1^1 (i)^4 - \binom{5}{5} 1^0 (i)^5$
 $= 1 - 5i + (-10) - 10 \times (-i) + 5 \times 1 - i = 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i = -4 + 4i$