

Fiche C1.3 : Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1 - Racines carrées d'un réel négatif

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution. Dans $\mathbb{C}$, $(3i)^2 = 9i^2 = -9$ et $(-3i)^2 = -9$: elle en a deux.

Propriété 1 : Soit a un réel strictement positif. L'équation $z^2 = -a$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z = i\sqrt{a}$ et $z = -i\sqrt{a}$.

Démonstration : Comme $(i\sqrt{a})^2 = i^2 \times a = -a$, on a $z^2 = -a \Leftrightarrow z^2 - (i\sqrt{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a}) = 0$.
D'après la règle du produit nul (qui fonctionne aussi dans $\mathbb{C}$) on obtient $z = i\sqrt{a}$ ou $z = -i\sqrt{a}$. $\square$

Exemple 1 : $z^2 = -9 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$; $z^2 = -2 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$; $z^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2}i$.

2 - Équation du second degré à coefficients réels

Théorème : Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$: deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: une solution réelle (double) $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: deux solutions complexes **conjuguées** $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ (avec $z_1 = z_2 = z_0$ si $\Delta = 0$).

Méthode : La résolution suit le même plan que dans $\mathbb{R}$:

- identifier a, b, c et calculer Δ ;
- si $\Delta < 0$, calculer $\sqrt{-\Delta}$ et appliquer les formules avec $i\sqrt{-\Delta}$ à la place de $\sqrt{\Delta}$;
- donner les solutions sous forme algébrique (elles doivent être conjuguées).

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 2z + 5 = 0$, puis factoriser $2z^2 + 2z + 5$.

Remarques :

- Dans $\mathbb{C}$, une équation du second degré à coefficients réels a **toujours** des solutions (même lorsque $\Delta < 0$)
- Somme et produit des solutions : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ (fiche C1.4).

Exemple 2 : $z_1 + z_2 = 2$ et $z_1 z_2 = (1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5$.

3 - Démonstration du théorème

Démonstration : Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Forme canonique : $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ car $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

• Si $\Delta = 0$: $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2$, qui s'annule si et seulement si $z = -\frac{b}{2a} = z_0$.

• Si $\Delta > 0$: $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$ et l'identité $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$ donne

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(z - z_2)(z - z_1).$$

• Si $\Delta < 0$: $-\Delta > 0$ et, comme $i^2 = -1$, $\frac{\Delta}{4a^2} = -\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2$. La même identité donne alors

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) = a(z - z_2)(z - z_1).$$

• Dans chaque cas, d'après la règle du produit nul (valable dans $\mathbb{C}$), les solutions sont exactement z_1 et z_2

(confondues en z_0 si $\Delta = 0$). Si $\Delta < 0$, comme a, b et $\sqrt{-\Delta}$ sont réels, $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}$: les deux solutions sont

conjuguées. □

4 - Pour aller plus loin : coefficients complexes

Remarque (hors programme) : Si a, b, c sont des nombres **complexes** ($a \neq 0$), la forme canonique reste valable : $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Mais Δ n'a plus de signe et le symbole $\sqrt{}$ n'a plus de sens : il faut connaître un complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ (en général, il est donné par l'énoncé).

Alors $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2$ et le calcul du 3 donne les solutions $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$. En général, elles **ne sont plus conjuguées.**

Exemple 4 (guidé) : On considère l'équation (E) : $z^2 - (1 + i)z + i = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ .

2. Vérifier que $\delta = 1 - i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$.

3. En déduire les solutions de (E).

4. Vérifier le résultat.