

Fiche C1.3 : Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1 - Racines carrées d'un réel négatif

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution. Dans $\mathbb{C}$, $(3i)^2 = 9i^2 = -9$ et $(-3i)^2 = -9$: elle en a deux.

Propriété 1 : Soit a un réel strictement positif. L'équation $z^2 = -a$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z = i\sqrt{a}$ et $z = -i\sqrt{a}$.

Démonstration : Comme $(i\sqrt{a})^2 = i^2 \times a = -a$, on a $z^2 = -a \Leftrightarrow z^2 - (i\sqrt{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a}) = 0$.
D'après la règle du produit nul (qui fonctionne aussi dans $\mathbb{C}$) on obtient $z = i\sqrt{a}$ ou $z = -i\sqrt{a}$. $\square$

Exemple 1 : $z^2 = -9 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$; $z^2 = -2 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$; $z^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2}i$.

2 - Équation du second degré à coefficients réels

Théorème : Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$: deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: une solution réelle (double) $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: deux solutions complexes **conjuguées** $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ (avec $z_1 = z_2 = z_0$ si $\Delta = 0$).

Méthode : La résolution suit le même plan que dans $\mathbb{R}$:

- identifier a, b, c et calculer Δ ;
- si $\Delta < 0$, calculer $\sqrt{-\Delta}$ et appliquer les formules avec $i\sqrt{-\Delta}$ à la place de $\sqrt{\Delta}$;
- donner les solutions sous forme algébrique (elles doivent être conjuguées).

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

- $a = 1, b = -2, c = 5$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

- $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{16} = 4$, donc $z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 2i$. $S = \{1 - 2i ; 1 + 2i\}$.

- Vérification : $(1 - 2i)^2 - 2(1 - 2i) + 5 = (1 - 4i + 4i^2) - 2 + 4i + 5 = -3 - 4i - 2 + 4i + 5 = 0$.

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 2z + 5 = 0$, puis factoriser $2z^2 + 2z + 5$.

- $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 5 = 4 - 40 = -36 < 0$ et $\sqrt{36} = 6$. Donc $z_1 = \frac{-2 - 6i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

- Factorisation : $2z^2 + 2z + 5 = 2\left(z + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)$.

Remarques :

- Dans $\mathbb{C}$, une équation du second degré à coefficients réels a **toujours** des solutions (même lorsque $\Delta < 0$)
- Somme et produit des solutions : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ (fiche C1.4).

Dans l'exemple 2 : $z_1 + z_2 = 2$ et $z_1 z_2 = (1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5$.

Démonstration : Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. On pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a^2}$

• On écrit le trinôme sous forme canonique : $az^2 + bz + c = a(z - \alpha)^2 + \beta = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

• Si $\Delta = 0$: $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2$, qui s'annule si et seulement si $z = -\frac{b}{2a} = z_0$.

• Si $\Delta > 0$: $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$ et l'identité $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$ donne

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a \left(z - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(z - z_2)(z - z_1).$$

• Si $\Delta < 0$: $-\Delta > 0$ et, comme $i^2 = -1$, $\frac{\Delta}{4a^2} = -\frac{-\Delta}{4a^2} = -\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2$.

La même identité donne alors $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) = a(z - z_2)(z - z_1).$

• Dans chaque cas, d'après la règle du produit nul (valable dans $\mathbb{C}$), les solutions sont exactement z_1 et z_2 (confondues en z_0 si $\Delta = 0$). Si $\Delta < 0$, comme a, b et $\sqrt{-\Delta}$ sont réels, $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}$: les deux solutions sont **conjuguées**. $\square$

Remarque : Le théorème s'étend aux équations du second degré aux coefficients complexes :

• Dans ce cas, le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est lui-même un nombre complexe et celui-ci n'a plus de signe : On aurait alors besoin de la racine carrée complexe de Δ , c'est à dire un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Un tel nombre δ existe toujours (et dans ce cas son opposé convient aussi).

• Si l'on reprend la démonstration précédente avec a, b, c des nombres **complexes** ($a \neq 0$) alors la forme canonique reste valable : $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

• On a alors $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2$ et le calcul du 3 donne les solutions $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$. En général, elles **ne sont plus conjuguées**.

Exemple 4 (guidé) : On considère l'équation (E) : $z^2 - (1 + i)z + i = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ .

$$a = 1, b = -(1 + i), c = i : \Delta = (1 + i)^2 - 4 \times 1 \times i = 1 + 2i + i^2 - 4i = 2i - 4i = -2i.$$

2. Vérifier que $\delta = 1 - i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$.

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i = \Delta. \text{ Donc } \delta = 1 - i \text{ convient.}$$

($-\delta = -1 + i$ conviendrait aussi et donnerait les mêmes solutions).

3. En déduire les solutions de (E).

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{(1 + i) - (1 - i)}{2} = \frac{2i}{2} = i \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{(1 + i) + (1 - i)}{2} = \frac{2}{2} = 1. \quad S = \{1 ; i\}.$$

4. Vérifier le résultat.

$1^2 - (1 + i) \times 1 + i = 1 - 1 - i + i = 0$ et $i^2 - (1 + i) \times i + i = -1 - i - i^2 + i = -1 - i + 1 + i = 0$. On remarque que les solutions 1 et i ne sont pas conjuguées.