

Fiche C1.4 : Polynômes et factorisation dans $\mathbb{C}$

1 - Polynômes à coefficients complexes

Définition 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **polynôme** de degré n à coefficients complexes est une fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres complexes avec $a_n \neq 0$.

Remarques : On admet qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Aussi, deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients : c'est le principe d'**identification des coefficients**.

Exemple 1 : $P(z) = z^4 - (3 + 2i)z^2 + 4iz - 1$ est un polynôme de degré 4. On note $\deg(P) = 4$

Définition 1 : Un nombre complexe α est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 2 : Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$. Vérifier que 1 et $1 + i$ sont des racines de P .

2 - Factorisation par $z - \alpha$

Propriété 1 : Pour tout entier $n \geq 1$ et tous nombres complexes z et α :

$$z^n - \alpha^n = (z - \alpha) (z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \alpha^2 z^{n-3} + \dots + \alpha^{n-2} z + \alpha^{n-1}).$$

Démonstration : Notons $S(z) = z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \dots + \alpha^{n-1}$ et développons $(z - \alpha)S(z) = z \times S(z) - \alpha \times S(z)$:

$$z \times S(z) = z^n + \alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \dots + \alpha^{n-1} z \quad (\text{on incrémente les puissances de } z)$$

$$\alpha \times S(z) = \alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \dots + \alpha^{n-1} z + \alpha^n \quad (\text{on incrémente les puissances de } \alpha)$$

Les termes $\alpha z^{n-1}, \alpha^2 z^{n-2}, \dots, \alpha^{n-1} z$ figurent dans les deux lignes et se simplifient dans la différence : il ne reste que z^n (premier terme de la première ligne) et $-\alpha^n$ (dernier terme de la seconde). $\square$

Exemples : $z^2 - \alpha^2 =$; $z^3 - \alpha^3 =$; $z^3 - 1 =$.

Théorème 1 (factorisation par une racine) : Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est une racine de P , alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.

Démonstration :

- Les termes constants a_0 se simplifient : $P(z) - P(\alpha) = a_n(z^n - \alpha^n) + \dots + a_2(z^2 - \alpha^2) + a_1(z - \alpha)$.
 - D'après la propriété 1, chaque $z^k - \alpha^k$ s'écrit $(z - \alpha)S_k(z)$ avec $S_k(z) = z^{k-1} + \alpha z^{k-2} + \dots + \alpha^{k-1}$ de degré $k-1$.
- Le facteur $z - \alpha$ est commun à tous les termes : $P(z) - P(\alpha) = (z - \alpha)[a_n S_n(z) + \dots + a_1 S_1(z)] = (z - \alpha)Q(z)$.
- Q est de degré $n-1$: son terme de plus haut degré est $a_n z^{n-1}$ (issu de $a_n S_n(z)$) et $a_n \neq 0$. Si α est racine de P , $P(\alpha) = 0$ et il reste $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$. $\square$

3 - Polynôme de degré n

Théorème 2 : Un polynôme de degré $n \geq 1$ admet **au plus n racines** dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : Par récurrence sur n montrons la propriété P_n : Un polynôme de degré n a au plus n racines.

- Initialisation : $n = 1$. $a_1 z + a_0 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{a_0}{a_1}$: un polynôme de degré 1 a une seule racine.
- Hérédité : supposons que, pour n fixé, que la propriété P_n est vraie et soit P de degré $n + 1$. Si P n'a aucune racine, c'est terminé. Sinon, soit α une racine : d'après le théorème 1, $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ avec $\deg Q = n$. Si β est une racine de P , alors $(\beta - \alpha)Q(\beta) = 0$, donc $\beta = \alpha$ ou $Q(\beta) = 0$ (produit nul). Les racines de P sont donc α et celles de Q , au plus n par hypothèse de récurrence : P a au plus $n + 1$ racines.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$ $\square$

Méthode (équation de degré 3 dont une racine α est connue) :

1. Vérifier que $P(\alpha) = 0$.
2. Écrire $P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$, développer et déterminer a, b, c par **identification des coefficients**.
3. Résoudre $az^2 + bz + c = 0$ (fiche C1.3) : les solutions de $P(z) = 0$ sont α et les racines du trinôme.

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

Remarques :

- **Théorème de d'Alembert-Gauss** : tout polynôme de degré $n \geq 1$ admet **au moins une racine** dans $\mathbb{C}$. Ce théorème garantit alors pour un polynôme P qu'il est toujours possible d'écrire $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$. De proche en proche, on finit par obtenir $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$, les z_k n'étant pas forcément distincts : Un polynôme P de degré n , possède exactement n racines **comptées avec multiplicité**.
- **Coefficients réels** : si les $a_k \in \mathbb{R}$ et que α est une racine complexe de P alors comme $\overline{a_k} = a_k$ et que $P(\alpha) = 0$, on a $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$ et $\overline{\alpha}$ est donc aussi une racine de P . Autrement dit, pour un polynôme à coefficient réel, ces racines non réelles vont forcément **par paires conjuguées**, chaque paire $\alpha, \overline{\alpha}$ donnant un facteur de degré 2 : $(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + \alpha\overline{\alpha}$ à coefficients réels.
- **Relations entre racines et coefficients** : Soit un polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. En développant, la « forme factorisée » $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ on obtient par identification :
Somme des racines : $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$; Produit des racines $z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$
En particulier si z_1, z_2 sont les racines du trinôme $az^2 + bz + c$: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.