

## Fiche C1.4 : Polynômes et factorisation dans $\mathbb{C}$

### 1 - Polynômes à coefficients complexes

**Définition 1** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Un **polynôme** de degré  $n$  à coefficients complexes est une fonction  $P$  définie sur  $\mathbb{C}$  par  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ , où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des nombres complexes avec  $a_n \neq 0$ .

**Remarques** : On admet qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Aussi, deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients : c'est le principe d'**identification des coefficients**.

**Exemple 1** :  $P(z) = z^4 - (3 + 2i)z^2 + 4iz - 1$  est un polynôme de degré 4. On note  $\deg(P) = 4$

**Définition 1** : Un nombre complexe  $\alpha$  est une **racine** de  $P$  si  $P(\alpha) = 0$ .

**Exemple 2** : Soit  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ . Vérifier que 1 et  $1 + i$  sont des racines de  $P$ .

•  $P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$  : 1 est racine de  $P$ .

•  $(1 + i)^2 = 2i$  et  $(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$ ,

donc  $P(1 + i) = (-2 + 2i) - 3 \times 2i + 4(1 + i) - 2 = -2 + 2i - 6i + 4 + 4i - 2 = 0$  :  $1 + i$  est racine de  $P$ .

### 2 - Factorisation par $z - \alpha$

**Propriété 1** : Pour tout entier  $n \geq 1$  et tous nombres complexes  $z$  et  $\alpha$  :

$$z^n - \alpha^n = (z - \alpha)(z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \alpha^2 z^{n-3} + \dots + \alpha^{n-2} z + \alpha^{n-1}).$$

**Démonstration** : Notons  $S(z) = z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \dots + \alpha^{n-1}$  et développons  $(z - \alpha)S(z) = z \times S(z) - \alpha \times S(z)$  :

$$z \times S(z) = z^n + \alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \dots + \alpha^{n-1} z \quad (\text{on incrémente les puissances de } z)$$

$$\alpha \times S(z) = \alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \dots + \alpha^{n-1} z + \alpha^n \quad (\text{on incrémente les puissances de } \alpha)$$

Les termes  $\alpha z^{n-1}, \alpha^2 z^{n-2}, \dots, \alpha^{n-1} z$  figurent dans les deux lignes et se simplifient dans la différence : il ne reste que  $z^n$  (premier terme de la première ligne) et  $-\alpha^n$  (dernier terme de la seconde).  $\square$

**Exemples** :  $z^2 - \alpha^2 = (z - \alpha)(z + \alpha)$  ;  $z^3 - \alpha^3 = (z - \alpha)(z^2 + \alpha z + \alpha^2)$  ;  $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ .

**Théorème 1** (factorisation par une racine) : Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Si  $\alpha$  est une racine de  $P$ , alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ .

**Démonstration** :

• Les termes constants  $a_0$  se simplifient :  $P(z) - P(\alpha) = a_n(z^n - \alpha^n) + \dots + a_2(z^2 - \alpha^2) + a_1(z - \alpha)$ .

• D'après la propriété 1, chaque  $z^k - \alpha^k$  s'écrit  $(z - \alpha)S_k(z)$  avec  $S_k(z) = z^{k-1} + \alpha z^{k-2} + \dots + \alpha^{k-1}$  de degré  $k - 1$ .

Le facteur  $z - \alpha$  est commun à tous les termes :  $P(z) - P(\alpha) = (z - \alpha)[a_n S_n(z) + \dots + a_1 S_1(z)] = (z - \alpha)Q(z)$ .

•  $Q$  est de degré  $n - 1$  : son terme de plus haut degré est  $a_n z^{n-1}$  (issu de  $a_n S_n(z)$ ) et  $a_n \neq 0$ . Si  $\alpha$  est racine de  $P$ ,  $P(\alpha) = 0$  et il reste  $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ .  $\square$

### 3 - Polynôme de degré $n$

**Théorème 2** : Un polynôme de degré  $n \geq 1$  admet **au plus  $n$  racines** dans  $\mathbb{C}$ .

Démonstration : Par récurrence sur  $n$  montrons la propriété  $P_n$  : Un polynôme de degré  $n$  a au plus  $n$  racines.

- Initialisation :  $n = 1$ .  $a_1 z + a_0 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{a_0}{a_1}$  : un polynôme de degré 1 a une seule racine.
- Hérédité : supposons que, pour  $n$  fixé, que la propriété  $P_n$  est vraie et soit  $P$  de degré  $n + 1$ . Si  $P$  n'a aucune racine, c'est terminé. Sinon, soit  $\alpha$  une racine : d'après le théorème 1,  $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$  avec  $\deg Q = n$ . Si  $\beta$  est une racine de  $P$ , alors  $(\beta - \alpha)Q(\beta) = 0$ , donc  $\beta = \alpha$  ou  $Q(\beta) = 0$  (produit nul). Les racines de  $P$  sont donc  $\alpha$  et celles de  $Q$ , au plus  $n$  par hypothèse de récurrence :  $P$  a au plus  $n + 1$  racines.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$   $\square$

Méthode (équation de degré 3 dont une racine  $\alpha$  est connue) :

1. Vérifier que  $P(\alpha) = 0$ .
2. Écrire  $P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$ , développer et déterminer  $a, b, c$  par **identification des coefficients**.
3. Résoudre  $az^2 + bz + c = 0$  (fiche C1.3) : les solutions de  $P(z) = 0$  sont  $\alpha$  et les racines du trinôme.

Exemple 2 : Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ .

- On a vu (exemple 1) que 1 est racine de  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ . D'après le théorème 1,  $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$  avec  $a, b, c$  à déterminer.
  - Développons :  $(z - 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$ . Par identification avec  $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$  :  
 $a = 1$  ;  $b - a = -3$  donc  $b = -2$  ;  $c - b = 4$  donc  $c = 2$  (et  $-c = -2$  : cohérent). Donc  $P(z) = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$ .
  - $z^2 - 2z + 2 = 0$  :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$ , d'où les solutions  $\frac{2 \pm 2i}{2} = 1 - i$  et  $1 + i$ .
- Conclusion :  $S = \{1 ; 1 - i ; 1 + i\}$  et  $P(z) = (z - 1)(z - 1 + i)(z - 1 - i)$ .

Remarques :

- **Théorème de d'Alembert-Gauss** : tout polynôme de degré  $n \geq 1$  admet **au moins une racine** dans  $\mathbb{C}$ .  
Ce théorème garantit alors pour un polynôme  $P$  qu'il est toujours possible d'écrire  $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ . De proche en proche, on finit par obtenir  $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ , les  $z_k$  n'étant pas forcément distincts : Un polynôme  $P$  de degré  $n$ , possède exactement  $n$  racines **comptées avec multiplicité**.
- **Coefficients réels** : si les  $a_k \in \mathbb{R}$  et que  $\alpha$  est une racine complexe de  $P$  alors comme  $\overline{a_k} = a_k$  et que  $P(\alpha) = 0$ , on a  $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$  et  $\overline{\alpha}$  est donc aussi une racine de  $P$ . Autrement dit, pour un polynôme à coefficient réel, ces racines non réelles vont forcément **par paires conjuguées**, chaque paire  $\alpha, \overline{\alpha}$  donnant un facteur de degré 2 :  $(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + \alpha \overline{\alpha}$  à coefficients réels.
- **Relations entre racines et coefficients** : Soit un polynôme  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ . En développant, la « forme factorisée »  $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$  on obtient par identification :  
Somme des racines :  $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$  ; Produit des racines  $z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$   
En particulier si  $z_1, z_2$  sont les racines du trinôme  $az^2 + bz + c$  :  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$  et  $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ .