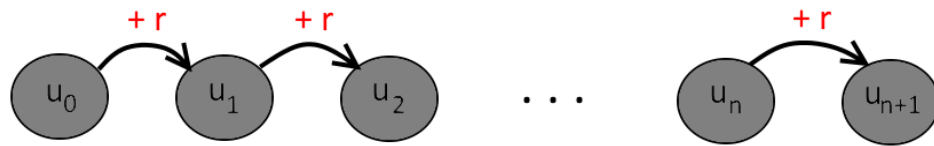


Fiche F1.1 : Suites arithmétiques

1 – Généralités

Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** r si pour tout rang n , on a $u_{n+1} = u_n + r$



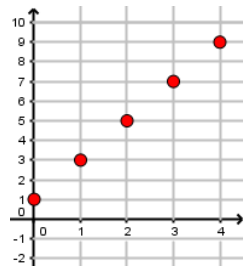
Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r , appelé la **raison**

Exemple 1 :

$$u_0 = 1 \text{ et } r = 2.$$

Formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 2$

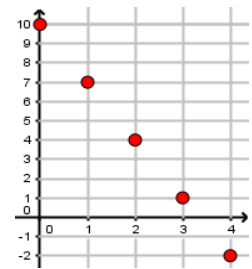
$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \\ u_2 &= 5 \\ u_3 &= 7 \\ u_4 &= 9 \\ u_5 &= 11 \end{aligned}$$



$$v_0 = 10 \text{ et } r = -3$$

Formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n - 3$

$$\begin{aligned} v_1 &= 7 \\ v_2 &= 4 \\ v_3 &= 1 \\ v_4 &= -2 \\ v_5 &= -5 \end{aligned}$$



Remarque : Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont **alignés**. On parle de **d'évolution linéaire**, croissante si $r > 0$ décroissante si $r < 0$.

2 – Formule explicite

La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans calculer tous les précédents.

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout rang n , on a $u_n = u_0 + nr$

Remarque : Lorsque le premier terme est u_p on utilise la formule $u_n = u_p + (n - p)r$

Exemple 2 :

$$u_0 = 1 \text{ et } r = 2.$$

- Formule explicite : $u_n = 1 + n \times 2$
 $= 2n + 1$
- Calcul de u_{150} : $u_{150} = 2 \times 150 + 1 = 301$

$$v_1 = -7 \text{ et } r = 3$$

- Formule explicite : $v_n = -7 + (n - 1) \times 3$
 $= 3n - 10$
- Calcul de v_{200} : $v_{200} = 3 \times 200 - 10 = 590$

Exemple 3 : Un athlète commence par courir 3000 m. Puis, il décide de s'entraîner chaque jour en parcourant 150 m de plus que la veille. On note d_n la distance parcourue le n^e jour d'entraînement.

- 1) Quelle est la nature de la suite (d_n) ? (d_n) est arithmétique de raison $r = 150$
- 2) Exprimer d_n en fonction de n . $d_n = d_0 + nr = 3000 + 150n$
- 3) Quelle distance l'athlète parcourera-t-il le 7^{ème} jour d'entraînement ?

$$d_7 = 3000 + 150 \times 7 = 4050. \text{ Il parcourra } 4050 \text{ m lors du } 7^{\text{ème}} \text{ jour d'entraînement}$$



3 – Moyenne arithmétique

Définition 2 : La **moyenne arithmétique** de deux nombres a et b est le nombre $\frac{a+b}{2}$.

Exemple 4 : La moyenne arithmétique de 6 et 18 est égal à $\frac{6+18}{2} = \frac{24}{2} = 12$

Propriété 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique alors pour tout rang n , u_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et de u_{n+1} : $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

Exemple 5 : On considère une suite (u_n) arithmétique mais de raison inconnue. Compléter le tableau ci-dessous et en déduire la raison de cette suite.

n	15	16	17	18	19
u_n	18	20.5	23	25.5	28

$$\begin{aligned}u_{16} &= \frac{u_{15} + u_{17}}{2} = \frac{18 + 23}{2} = 20.5 \\u_{18} &= \frac{u_{17} + u_{19}}{2} = \frac{23 + 28}{2} = 25.5\end{aligned} \quad r = 2.5$$

Exemple 6 : Les nombres $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ sont-ils les termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Si c'était le cas alors la moyenne arithmétique du premier et du dernier devrait coïncider avec le second. Or :

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = 0.375 \neq \frac{1}{3}$$

4 – Somme des termes

Propriété 3 : Pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple 7 : Lors d'une fête (post-COVID), tous les élèves de la classe trinquent ensemble. Combien y aura-t-il de « TCHIN » au total ?

Avec une classe de 20 élèves : Le 1^{er} élève trinque avec 19 personnes, le deuxième ayant déjà trinqué avec le premier, ne trinquent qu'avec 18 personnes. Le troisième avec 17 personnes, etc. Finalement, on calcule :

$$S = 19 + 18 + 17 + \dots + 1 = \sum_{k=1}^{19} k = \frac{19 \times (19+1)}{2} = \frac{19 \times 20}{2} = 190. \text{ Il y aura 190 « TCHIN » au total.}$$

Propriété 4 : Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 .

$$\text{On a } \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : On pourra retenir la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

Exemple 8 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 5$. Calculer la somme des 10 premiers termes consécutifs de cette suite :

$$\sum_{k=0}^9 u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2} = 10 \times \frac{1 + (1+9 \times 5)}{2} = 10 \times \frac{1+46}{2} = 235$$

Exemple 9 : Calculer la distance parcouru par l'athlète de l'ex 3 pendant sa 1^{ère} semaine d'entraînement.

$$\sum_{k=1}^7 d_k = d_1 + \dots + d_7 = 7 \times \frac{d_1 + d_7}{2} = 7 \times \frac{3150 + 4050}{2} = 25200. \text{ Il aura parcouru 25 km et 200m}$$

