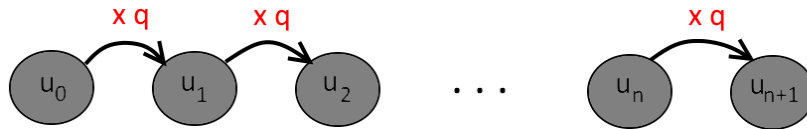


Fiche F1.2 : Suites géométriques

1 – Généralités

Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** q si pour tout rang n , on a $u_{n+1} = q \times u_n$



Pour passer d'un terme au suivant, on le multiplie toujours par le même nombre q , appelé la **raison**

Exemple 1 :

$$u_0 = 1 \text{ et } q = 3.$$

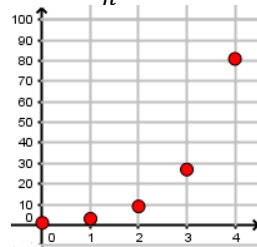
Formule de récurrence : $u_{n+1} = 3 \times u_n$

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 9$$

$$u_3 = 27$$

$$u_4 = 81$$



$$v_0 = 2 \text{ et } q = \frac{1}{2}$$

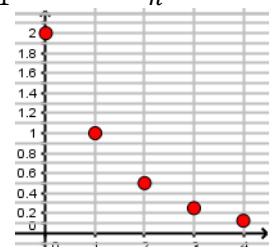
Formule de récurrence : $v_{n+1} = 0.5 \times v_n$

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = 0.5$$

$$v_3 = 0.25$$

$$v_4 = 0.125$$



Remarque : Si les termes d'une grandeur peuvent être modélisés par une suite géométrique, on parle de **de croissance exponentielle** si $q > 1$ et de **décroissance exponentielle** si $0 < q < 1$.

2 – Formule explicite

La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans avoir à calculer tous les précédents.

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout rang n , on a $u_n = u_0 \times q^n$

Remarque : Lorsque le premier terme est u_p on utilise la formule $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple 2 :

$$u_0 = 2 \text{ et } q = 3.$$

• Formule explicite : $u_n = 2 \times 3^n$

• Calcul de $u_{10} : = 2 \times 3^{10} = 118\,098$

$$v_1 = 1 \text{ et } q = \frac{1}{2}$$

• Formule explicite : $v_n = 1 \times 0.5^{n-1}$

• Calcul de $v_8 : = 1 \times 0.5^{8-1} = 0.5^7 = 0.0078$

Remarque : Lorsqu'une quantité subit plusieurs évolutions successives d'un même pourcentage $a\%$, alors on peut modéliser mathématiquement l'évolution de cette quantité par une suite géométrique, de premier terme u_0 égale à sa valeur initiale, et de raison $q = 1 + \frac{a}{100}$.

Exemple 3 : On place un capital de 5000 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an.

On note c_n la valeur du capital après n années de placement.

1) Quelle est la nature de la suite (c_n) ? (c_n) est géométrique de raison $q = 1 + \frac{4}{100} = 1.04$

2) Exprimer c_n en fonction de n . $c_n = u_0 \times q^n = 5000 \times 1.04^n$

3) Quel capital disposera-t-on après 8 années de placement ? $c_8 = 5000 \times 1.04^8 = 6842,85$ €



3 – Moyenne géométrique

Définition 2 : La **moyenne géométrique** de deux nombres a et b est le nombre $\sqrt{ab}$.

Exemple 4 : La moyenne arithmétique de 6 et 18 est égal à $\sqrt{6 \times 18} = \sqrt{108} \approx 10,4$.

Remarque : La moyenne géométrique n'est pas égal à la moyenne arithmétique.

Propriété 2 : (u_n) est une suite géométrique alors pour tout rang n si et seulement si u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et de u_{n+1} : $u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}$

Exemple 5 : On a relevé la population d'une ville pendant trois années consécutives :

n	2018	2019	2020	2021
u_n	30000	31500	33075	34729

1) La population de cette ville suit-elle une évolution géométrique ? Si oui, de quelle raison ?

On vérifie que la moyenne géométrique du premier et du dernier terme est égal au terme du milieu :

$\sqrt{30000 \times 33075} = 31500$ donc il s'agit bien d'une progression géométrique.

La raison est donnée par $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{31500}{30000} = 1.05$. La population augmente donc de 5% par an.

2) Faire une prédiction de la population de cette ville en 2021.

Si la population continue de suivre la même évolution elle sera de $1.05 \times 33075 \approx 34729$ habitants

4 – Somme des termes

Propriété 3 : Pour tous réel $q \neq 1$ et entier naturel n , on a $\sum_{k=1}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple 6 : Un homme fait un premier pas d'un mètre. Puis, il marche en réalisant à chaque fois un pas deux fois plus petit que le précédent. Quelle distance aura-t-il parcouru au bout de 10 pas (au mm près) ?

1^{er} pas : 1 m ; 2^{ème} pas : $\frac{1}{2}$ m ; 3^{ème} pas : $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ m ; 4^{ème} pas : $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ m ; ... ; 10^{ème} pas : $\frac{1}{2^{10}}$ m

On calcule donc : $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} = \frac{1-0.5^{10}}{1-0.5} = 1.998$ m. Il aura parcouru 1,998 m

Propriété 4 : Soit (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 .

On a $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : On pourra retenir la formule suivante : $\sum_{k=0}^n u_k = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$

Exemple 7 : La somme des 10 premiers termes consécutifs d'une suite (u_n) géométrique de 1^{er} terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$ est égal à : $\sum_{k=0}^9 u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 5 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 515$

Exemple 8 : Un couple rembourse un crédit en versant une mensualité qui augmente de 2 % par mois, pendant 1 ans. La première mensualité est de 200€. Quel est le coût total du crédit ?

Soit u_n la mensualité du n^{ème} mois. (u_n) est géométrique de raison $q = 1.02$ et de 1^{er} terme $u_1 = 200$.

Le coût total du crédit est égal à $\sum_{k=1}^{12} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_{12} = 200 \times \frac{1-1.02^{12}}{1-1.02} = 2642.42\text{€}$.

