

Fiche F2.4 : Fonctions du second degré

1 – Définition

Définition 1 : Soit a , b et c trois nombres réels tel que $a \neq 0$. On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple 1 : $f(x) = x^2 - 3x + 5$ est une fonction du second degré. On a $a = 1$; $b = -3$ et $c = 5$

2 – Représentation graphique et sens de variation

Propriété 1 :

- La courbe d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole**.
- Si $a > 0$ alors la parabole est orientée vers le **haut**, si $a < 0$ alors la parabole est orientée vers le **bas**.
- De plus si on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ alors le **sommet** S de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha, \beta)$.

Remarque : A partir de l'orientation de la parabole et des coordonnées de son sommet on peut déduire facilement le tableau de variation de la fonction.

Exemple 2 : Déterminer le tableau de variation des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$: Les coefficients sont $a = 0.5$; $b = 3$ et $c = -2$

$$\alpha = -\frac{3}{2 \times 0.5} = -\frac{3}{1} = -3$$

$$\beta = f(-3) = \frac{1}{2} \times (-3)^2 + 3 \times 3 - 2 = 11.5$$

Orientation : Vers le haut

Sommet : $S(-3; 11.5)$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$		11.5	

- $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$\alpha = -\frac{2}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\beta = f(1) = -(1)^2 + 2 \times 1 + 3 = 4$$

Orientation : Vers le bas

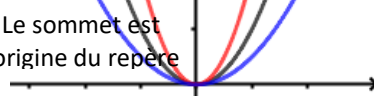
Sommet : $S(1; 4)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		4	

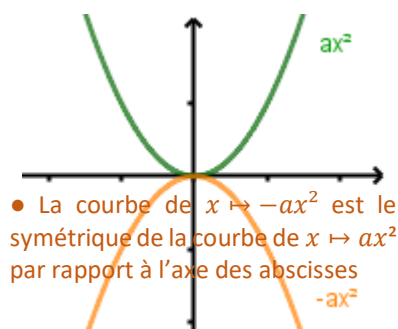
3 – Fonctions particulières $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto ax^2 + c$

Influence du coefficient a ($a > 0$)

- Plus a est grand, plus la parabole se « ressert ».
- Plus a est petit, plus la parabole « s'écarte ».
- Le sommet est l'origine du repère.



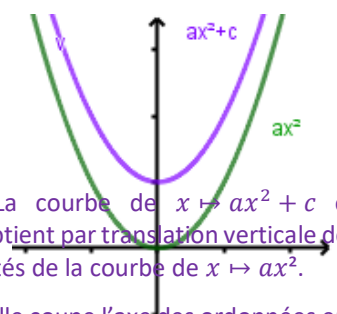
Passage de $a > 0$ à $a < 0$



- La courbe de $x \mapsto -ax^2$ est la symétrique de la courbe de $x \mapsto ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses.

Influence du coefficient c

- La courbe de $x \mapsto ax^2 + c$ est s'obtient par translation verticale de c unités de la courbe de $x \mapsto ax^2$.
- Elle coupe l'axe des ordonnées en c .



Remarque : Toutes ses fonctions particulières ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées $x = 0$



4 – Forme factorisée

Propriété 2 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré admettant deux **racines** x_1 ou x_2 (distinctes ou confondues) alors f se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Remarque :

- Les racines d'un polynôme sont les valeurs qui annule la fonction : $f(x_1) = f(x_2) = 0$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la forme développée et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ la forme factorisée.
- Si x_1 et x_2 sont confondues alors on peut noter x_0 l'unique racine et on a alors $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si f n'admet pas de racines alors la fonction f n'admet pas de forme factorisée.

Exemple 3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$

1) Vérifier que -2 et 5 sont les racines de la fonction f

$$f(-2) = 3 \times (-2)^2 - 9 \times (-2) - 30 = 12 + 18 - 30 = 0$$

$$f(5) = 3 \times 5^2 - 9 \times 5 - 30 = 75 - 45 - 30 = 0$$

2) En déduire la forme factorisée de f .

$$\text{La forme factorisée de } f \text{ est donc } f(x) = 3(x - (-2))(x - 5) = 3(x + 2)(x - 5)$$

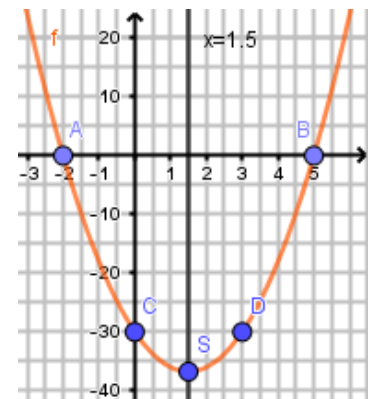
5 – Courbe et signe des fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

Propriété 3 : Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ une fonction du second degré écrite sous forme factorisée.

- La parabole de f coupe l'axe des abscisses en x_1 et x_2
- L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Exemple 4 : Tracer l'allure de la courbe de la fonction $f(x) = 3x^2 - 9x - 30 = 3(x + 2)(x - 5)$

- $a > 0$ donc la parabole est orientée vers le haut.
- La parabole coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -2$ (A) et $x_2 = 5$. (B)
- La parabole coupe l'axe des ordonnées en $c = -30$. (C)
- On a $\alpha = \frac{-2+5}{2} = 1.5$.
- Axe de symétrie : $x = 1.5$. (D)
- $\beta = f(1.5) = 3 \times 1.5^2 - 9 \times 1.5 - 30 = -36.75$
- Le sommet est en S(1.5; -36.75)



Propriété 4 : Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ une fonction du second degré écrite sous forme factorisée, alors la fonction f est toujours du signe du coefficient a sauf entre ses racines.

Exemple 5 : Réaliser le tableau de signe de la fonction $f(x) = 3x^2 - 9x - 30 = 3(x + 2)(x - 5)$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

$a > 0$ donc la fonction f sera positive
sauf entre -2 et 5 où elle sera négative.

