

Fiche F2.5 : Fonctions du troisième degré

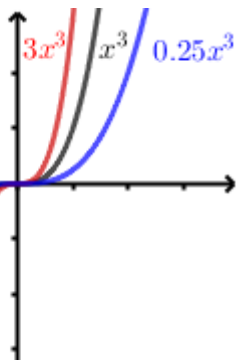
1 – Définition

Définition 1 : Soit a, b, c et d trois nombres réels tel que $a \neq 0$. On appelle **polynôme du troisième degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

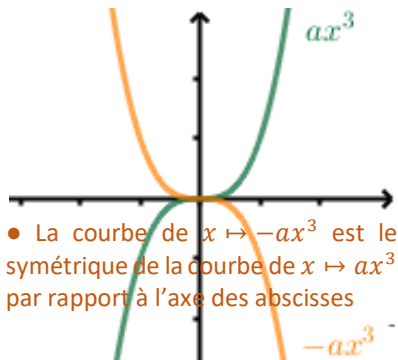
Exemple 1 : $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ est un polynôme de degré 3. On a $a = 2$; $b = -1$ et $c = 0$ et $d = 1$

2 – Fonctions particulières $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + d$

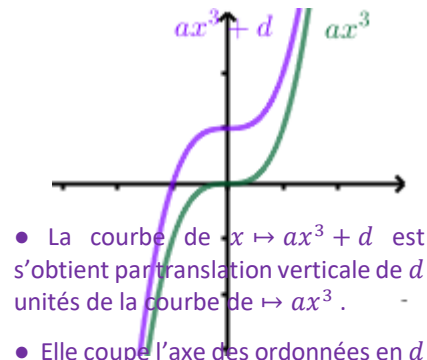
Influence du coefficient a ($a > 0$)

- Plus a est grand, plus la courbe se « ressert ».
 - Plus a est petit, plus la courbe « s'écarte ».
 - La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- 

Passage de $a > 0$ à $a < 0$

- 
- La courbe de $x \mapsto -ax^3$ est la symétrique de la courbe de $x \mapsto ax^3$ par rapport à l'axe des abscisses.

Influence du coefficient d

- 
- La courbe de $x \mapsto ax^3 + d$ est s'obtient par translation verticale de d unités de la courbe de $x \mapsto ax^3$.
 - Elle coupe l'axe des ordonnées en d .

3 – Résolution de l'équation $x^3 = k$

Propriété 1 : Soit k un nombre réel positif. L'équation $x^3 = k$ admet une unique solution qui est :

$$x = k^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{k}$$

Exemple 2 : L'équation $x^3 = 10$ admet une solution unique qui est $x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \approx 2.15$

Exemple 3 : Déterminer le(s) antécédent(s) du nombre 3 par la fonction $f(x) = 2x^3 - 13$.

On résout $2x^3 - 13 = 3$ d'où $2x^3 = 16$ d'où $x^3 = 8$ d'où $x = \sqrt[3]{8} = 2$

Le nombre 3 admet un unique antécédent par f qui est 2

4 – Forme factorisée

Propriété 2 : Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction de degré 3 admettant trois **racines** x_1, x_2 et x_3 alors f se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Remarque : Cette factorisation n'est pas toujours possible car f n'admet pas toujours 3 racines.

Exemple 4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x$

1) Trouver les 3 racines de ce polynôme

$$f(0) = 0^3 - 0 = 0 ; f(1) = 1^3 - 1 = 0 \text{ et } f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0.$$

Les trois racines sont -1 ; 0 et 1

2) En déduire la forme factorisée de f .

$$\text{La forme factorisée de } f \text{ est donc } f(x) = 1x(x - 1)(x - (-1)) = x(x - 1)(x + 1)$$



5 – Signe des fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

- La forme factorisée permet de savoir directement en quelle(s) valeur(s) la fonction s'annule : Les racines x_1 , x_2 et x_3 correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
- Pour déterminer le signe d'une fonction de degré 3 sous forme factorisée on réalise un tableau de signe produit : Dans un grand tableau, on donne le signe de chaque facteur, puis on applique la règle des signes :
 - . Le produit d'un nombre pair de « - » donne un « + »
 - . Le produit d'un nombre impair de « - » donne un « - »

Exemple 4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = -2(x - 2)(x - 5)(x + 1)$

1) Déterminer les racines de la fonction f

La fonction admet 3 racines qui sont : -1 ; 2 et 5 .

2) Réaliser le tableau de signe de la fonction

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
-2	—	—	—	—	—
$(x - 2)$	—	—	0	+	+
$(x - 5)$	—	—	—	0	+
$(x + 1)$	—	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	—	0	—

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$

$f(x) \leq 0$ lorsque la fonction f est négative (—).

Donc $S = [-1; 2] \cup [5; +\infty[$

4) Vérifier les résultats à l'aide de la courbe représentative de la fonction f ci-dessous

