

Fiche F3.1 : Taux d'accroissement

1 – Définition

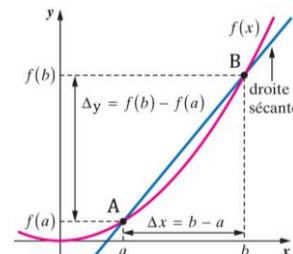
On considère une fonction f définie sur un intervalle I ainsi que deux nombres a et b de I

Définition 1 : On appelle **taux d'accroissement** (ou de **variation**) de f entre a et b le nombre $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Remarque : Soient A et B les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b .

Graphiquement, le taux d'accroissement de f entre a et b correspond alors au coefficient directeur de la droite (AB) :

Comme $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ on a $\text{pente de } (AB) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Exemple 1 : Soit f la fonction carré : $f(x) = x^2$

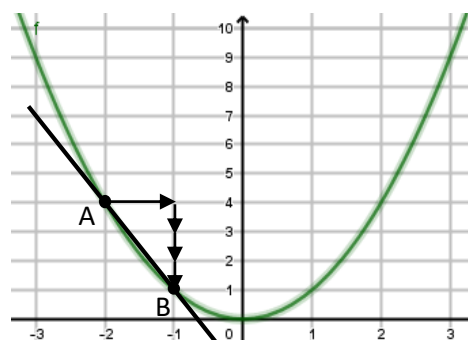
- 1) Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et 3.

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^2-1^2}{3-1} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

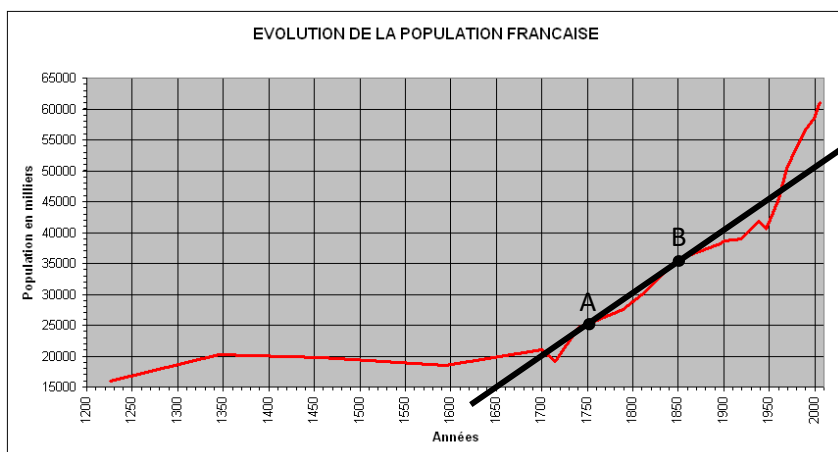
- 2) Lire graphiquement le taux d'accroissement de f entre -2 et -1 .

On place les points A et B de la courbe d'abscisses -2 et -1 .

Il s'agit du coefficient directeur de la droite (AB) : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$.



Exemple 2 : La courbe f ci-dessous représente l'évolution de la population française entre 1200 et 2000.



- 1) Déterminer le taux d'accroissement de la population française et interpréter ces résultats.

a. Entre 1400 et 1600 : $\frac{f(1600)-f(1400)}{1600-1400} = \frac{18\,000 - 20\,000}{200} = -10$.

La population française a perdu en moyenne 10 milliers d'habitants par an entre 1400 et 1600.

b. Entre 1850 et 1900 : $\frac{f(1900)-f(1850)}{1900-1850} = \frac{39\,000 - 36\,000}{50} = 60$.

La population française a gagné en moyenne 60 milliers d'habitants par an entre 1850 et 1900.

c. Entre 1950 et 2000 : $\frac{f(2000)-f(1950)}{2000-1950} = \frac{59\,000 - 42\,000}{50} = 340$.

La population française a gagné en moyenne 340 milliers d'habitants par an entre 1850 et 1900.

- 2) Estimer graphiquement le taux d'accroissement de la population française entre 1750 et 1850.

On place les points A et B de la courbe d'abscisses respectives 1750 et 1850.

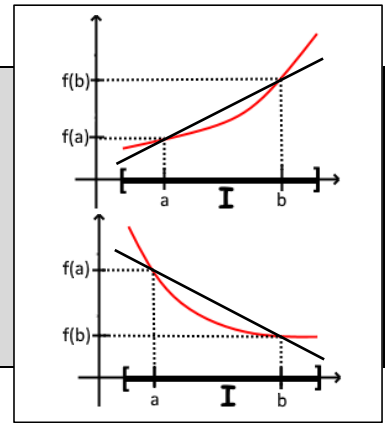
Le taux d'accroissement est égal au coefficient de la droite (AB) est égal à $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10\,000}{100} = 100$.



2 – Lien avec le sens de variation

Propriété 1 : On considère une fonction f définie sur un intervalle I

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout nombre a et b de I , le taux d'accroissement de f entre a et b est **positif**.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout nombre a et b de I , le taux d'accroissement de f entre a et b est **négatif**.

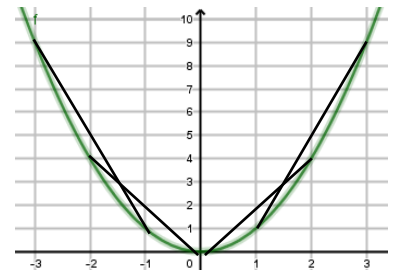


Exemple 3 : Reprenons l'exemple précédent.

- La population française est croissante sur l'intervalle $I = [1750; 1900]$ donc le taux d'accroissement entre deux années de cet intervalle (par exemple entre 1850 et 1900) est positif.
- La population française est décroissante sur l'intervalle $I = [1350; 1600]$ donc le taux d'accroissement entre deux années de cet intervalle (par exemple entre 1400 et 1600) est négatif.

Exemple 4 : Soit f la fonction carré : $f(x) = x^2$

- Le taux d'accroissement entre deux nombres positifs est toujours positif :
La fonction carré est donc croissante sur $[0; +\infty[$
- Le taux d'accroissement entre deux nombres négatifs est toujours négatifs :
La fonction carré est donc décroissante sur $] -\infty; 0]$



3 – Taux de variation d'une fonction affine

Propriété 2 : Le taux de variation d'une fonction affine entre deux nombres a et b est constant égal à son coefficient directeur.

Exemple 5 : On considère la fonction $f(x) = 3x + 1$. Montrer que le taux de variation de f est constant.

$$\text{Pour tous nombres réels } a \text{ et } b, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3b+1-(3a+1)}{b-a} = \frac{3b+1-3a-1}{b-a} = \frac{3b-3a}{b-a} = \frac{3(b-a)}{b-a} = 3.$$

Le taux de variation de f est donc constant égal à 3 (qui est le coefficient directeur de f).

