

Fiche F3.2 : Nombre dérivé

1 – Introduction

- La pente d'une droite est constante : Elle est donnée par son coefficient directeur.
- La pente de la courbe d'une fonction f , elle, évolue : Elle n'est pas la même en chaque point.
- Le **nombre dérivé**, qui sera noté $f'(a)$, permet de représenter la pente de sa courbe en la valeur $x = a$.
- Pour pouvoir définir la pente d'une courbe en un point nous avons besoin d'une droite qui « approxime » la courbe autour de ce point : C'est ce que l'on appelle une **tangente**.

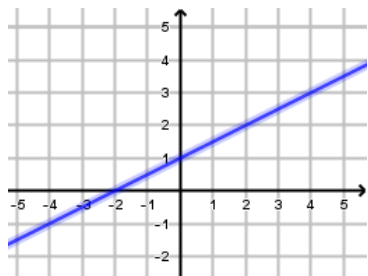


Fig 1 : Droite : $y = \frac{1}{2}x + 1$
Sa pente est constante égal à 0.5

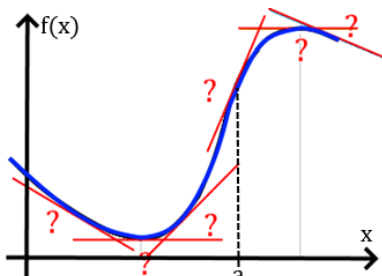


Fig 2 : Une courbe de fonction
 $f'(a)$ = pente de la courbe en a

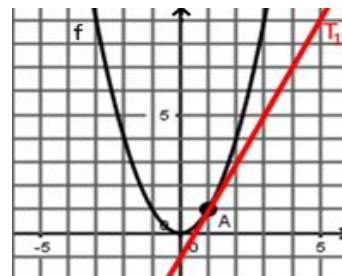
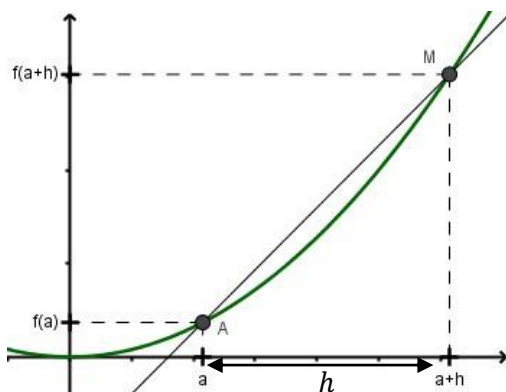


Fig 3 : Une courbe et sa tangente en 1
 $f'(1)$ = pente de $T_1 = 2$

Construction mathématique : Nous allons maintenant voir comment construire la tangente à une courbe en un point et comment définir le nombre $f'(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et A un point de sa courbe.
- On s'intéresse à la pente de sa courbe au niveau d'un point A d'abscisse $x = a$.



➤ Etape 1 : Choix d'un pas et construction de la sécante.

- On choisit un pas $h > 0$.
- A partir du point A , on avance de ce pas h sur l'axe des abscisses. On obtient alors le point M de la courbe de f d'abscisse $a + h$.
- On peut donc considérer la droite (AM) appelée la sécante.

➤ Etape 2 : Taux d'accroissement entre A et M :

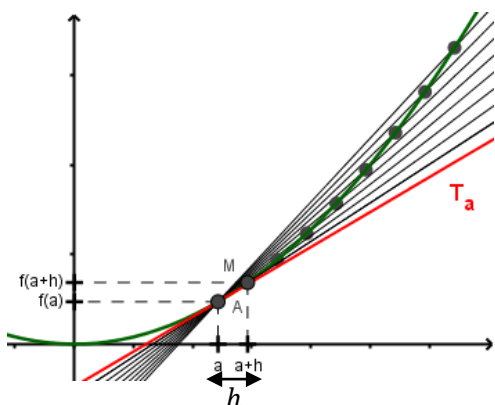
- Calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$:

$$\tau = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- C'est le coefficient directeur de la sécante (AM)

➤ Etape 3 : On fait tendre h vers 0 : $h \rightarrow 0$

- Le point M se rapproche de A , et la sécante (AM) se rapproche d'une « position limite » : C'est la **tangente** à la courbe de f en a .
- Le taux d'accroissement se rapproche donc d'une valeur limite qui coïncide avec la pente de la tangente : Cette valeur limite qui correspond au **nombre dérivé** $f'(a)$.



2 – Nombre dérivée

Définition 1 : On dit que f est **dérivable** en a , lorsque le taux d'accroissement $\tau = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivée de f en a** et est noté $f'(a)$. On écrit alors $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple 1 : Soit f la fonction carré : $f(x) = x^2$

Calculons le taux d'accroissement τ de la fonction f entre 1 et $1+h$:

$$\tau = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1^2+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Lorsque h se rapproche de 0, le taux d'accroissement se rapproche de 2 : Cela s'écrit, $\lim_{h \rightarrow 0} 2+h = 2$

La fonction carré est donc dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

Remarque : Une fonction n'est pas toujours dérivable en un point : Parfois, le taux d'accroissement devient de plus en plus grand et ne se rapproche pas d'un nombre réel. C'est le cas de la fonction racine carré en 0.

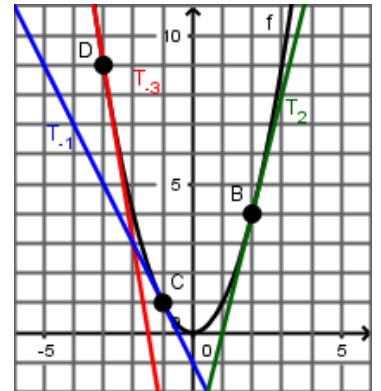
3 – Tangente à un courbe en un point

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable en a , la tangente T_a à la courbe de f au niveau du point A est la droite qui passe par A et a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : Ainsi, lorsque la tangente T_a est tracée, on peut lire graphiquement le nombre dérivée $f'(a)$.

Exemple 2 : Soit : $f(x) = x^2$ dont on tracé ci-contre sa courbe ainsi que que les tangentes T_2 , T_{-1} et T_{-3} au niveau des points B , C et D . L'axe Ox est tangent à la courbe en 0. Déterminer graphiquement les nombres dérivées suivants :

- $f'(2) =$ coefficient directeur de $T_2 = 4$
- $f'(-1) =$ coefficient directeur de $T_{-1} = -2$
- $f'(-3) =$ coefficient directeur de $T_{-3} = -6$
- $f'(0) =$ coefficient directeur de T_0 (c'est l'axe Ox) = 0



Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a alors la tangente T_a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 3 Soit $f(x) = x^2$ dont on tracé ci-contre sa courbe et soit A le point de sa courbe d'abscisse $a = 1$. Donner une équation de la tangente T_1 puis tracer la sur le graphique ci-contre :

T_1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Or d'après exemple 1, on a $f'(1) = 2$ et on a aussi $f(1) = 1^2 = 1$

L'équation de T_1 devient $y = 2(x - 1) + 1$ c'est-à-dire $y = 2x - 2 + 1$

D'où finalement $y = 2x - 1$.

A partir de l'équation on peut alors tracer la tangente.

