

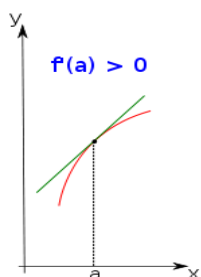
Fiche F3.4 : Dérivée, Sens de variation & Extremums

1 – Dérivée et Sens de variation

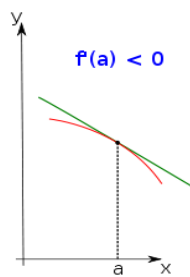
Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **positive** sur I .
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **négative** sur I .

Explication : Cette propriété est admise mais en voici une explication intuitive.



Dire que f' est positive sur I signifie que la « pente » de la courbe est positive en tout point a de I . La fonction est donc croissante sur I .



Dire que f' est négative sur I signifie que la « pente » de la courbe est négative en tout point a de I . La fonction est donc décroissante sur I .

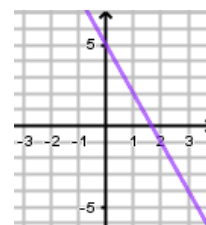
Remarque : Pour étudier les **variations** d'une fonction f , on peut donc étudier le **signe** de sa dérivée f' : Pour une fonction polynôme, on est alors amené à étudier une fonction plus simple car de degré inférieur.

Exemple 1 : Déterminer le sens de variation de la fonction $f(x) = -3x + 5$.

On commence par dériver la fonction f : $f'(x) = -3$

f' est une fonction constante, négative sur $\mathbb{R}$

f est donc une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.



Exemple 2 : Réaliser le tableau de variation de la fonction $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

1) Dériver la fonction f . Quelle est la forme de la fonction f' ?

$$f'(x) = 2 \times 2x - 12 \times 1 + 0 = 4x - 12$$

f' est une fonction affine et sera donc représentée par une droite.

2) En quelle valeur la dérivée f' s'annule-t-elle ?

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

3) Tracer la dérivée f' dans le repère ci contre et indiquer son allure.

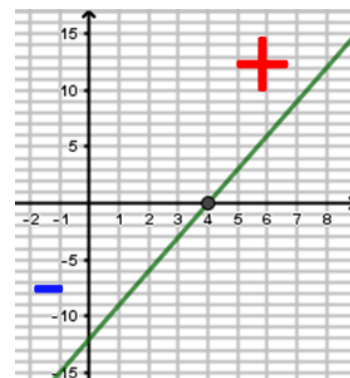
Son coefficient directeur $a = 4$ est positif donc la droite monte.

4) Compléter le tableau ci-dessous.

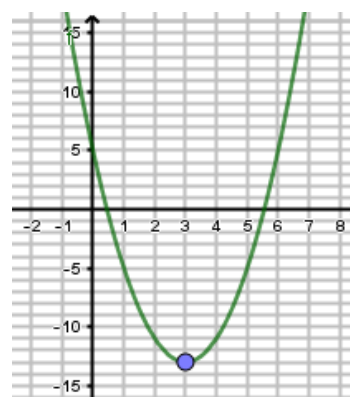
x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	–	0	+
Variation de $f(x)$			

$$f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 5 = 18 - 36 + 5 = -13$$

5) Tracer l'allure de la courbe de f dans le repère ci contre.



Fonction dérivée f'



Fonction f



Exemple 3 : Réaliser le tableau de variation de la fonction $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2$.

1) Dériver la fonction f . Quelle est la forme de la fonction f' ?

$$f'(x) = 3x^2 - 1.5 \times 2x - 6 \times 1 + 0 = 3x^2 - 3x - 6$$

f' est un polynôme du second degré. Sa courbe est une parabole.

2) Montrer que f' peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = 3(x + 1)(x - 2)$

$$\begin{aligned} 3(x + 1)(x - 2) &= 3(x^2 - 2x + x - 2) \\ &= 3(x^2 - x - 2) \\ &= 3x^2 - 3x - 6 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

3) Représenter l'allure de la fonction f' dans le repère ci contre.

$a = 3 > 0$ donc la parabole est orienté vers le haut.

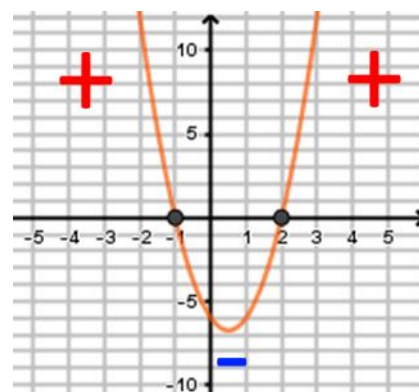
4) Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de $f(x)$			$\nearrow$	5.5	$\searrow$	-8	$\nearrow$

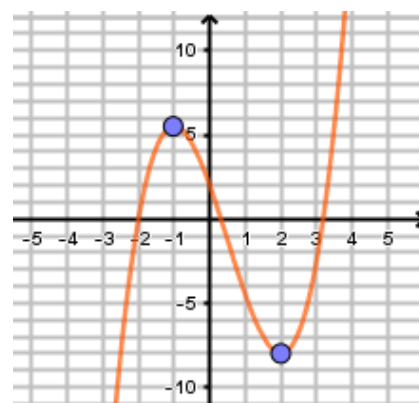
$$f(-1) = (-1)^3 - 1.5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2 = 5.5$$

$$f(2) = (2)^3 - 1.5 \times (2)^2 - 6 \times 2 + 2 = -8$$

5) Tracer l'allure de la courbe de f dans le repère ci contre.



Fonction dérivée f'

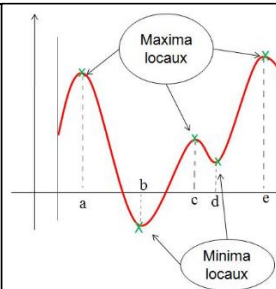


Fonction f

2 – Dérivée et Extremums

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f admet **maximum local** en a , si au voisinage de a , $f(a)$ est la plus grande des images.
- On dit que f admet **minimum local** en a , si au voisinage de a , $f(a)$ est la plus petite des images.



Graphiquement :

- Un maximum local correspond à un « pic »
- Un minimum local correspond à un « creux ».

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction f admet un extremum local en a si et seulement si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe.

Remarque : On peut facilement lire les extremums locaux dans le tableau de variation

Exemple 4 : Reprendre les trois exemples précédents et indiquer les extremums locaux

- Ex 1 : La dérivée f' ne s'annule pas. La fonction f n'admet donc pas d'extremums locaux
- Ex 2 : La fonction f admet un minimum local (il est d'ailleurs global) en $x = 3$ qui vaut -13
- Ex 3 : La fonction f admet un maximum local en -1 qui vaut 5.5 et un minimum local en 2 qui vaut -8 .

Remarque : La condition $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour avoir un extremum local, f' doit également changer de signe en a : « - puis + » correspond à un **minimum local** et « + puis - » correspond à un **maximum local**.

