

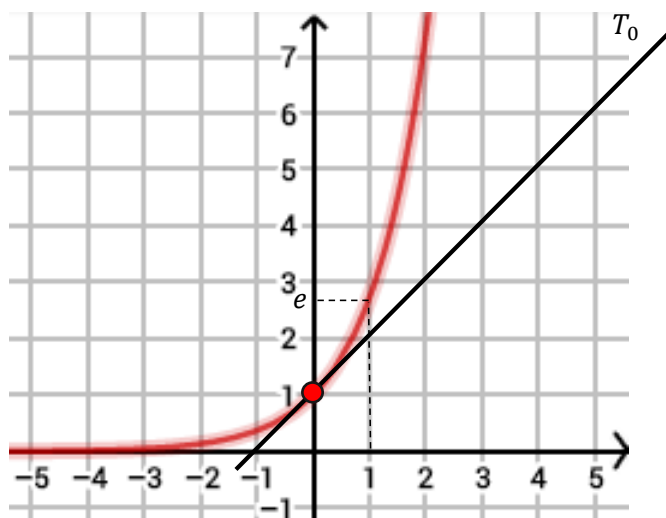
Fiche F4.1 : La fonction exponentielle

1 – Définition et Courbe représentative

Théorème Définition 1 : Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction f est appelée la **fonction exponentielle** et elle est notée $f(x) = \exp(x)$.

Remarque : Dire qu'une fonction f est égale à sa dérivée f' , signifie que la valeur de cette fonction est égale en tout point à la pente de la courbe de cette fonction. Pour construire cette fonction, on démarre du point $f(0) = 1$ où la courbe a une pente égale à 1. Puis, la valeur de la fonction augmente progressivement en même temps que la pente de sa courbe. On obtient une courbe qui croît de plus en plus rapidement d'où cette appellation de « fonction exponentielle ».

Courbe représentative : Voici la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x)$.



- La courbe de la fonction exponentielle a pour tangente en $x = 0$ la droite T_0 d'équation :
 $T_0: y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$ c'est-à-dire $T_0: y = x + 1$ car par définition $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.
- On appelle **nombre d'Euler** et on note e , l'image de 1 par la fonction exponentielle : $e = \exp(1)$.
 Ce nombre est irrationnel et a pour valeur approchée $e \approx 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045$.
- On utilise souvent pour cette fonction la **notation exponentielle** $f(x) = e^x$.
 Avec cette notation on a $e^0 = \exp(0) = 1$ et $e^1 = \exp(1) = e$.

2 – Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1 :

- Pour tout nombre réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$.
- La fonction exponentielle est **strictement positive** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
- La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	+	
x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$

Remarque : En particulier la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

