

Fiche F4.2 : Propriétés algébriques

1 – Relation fonctionnelle

Propriété 1 : Pour tous nombres réels a et b , on a la relation suivante : $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Remarque : Cette relation fonctionnelle justifie la notation e^x sous forme de puissance : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Exemple 1 : Simplifier les expressions suivantes :

- $\exp(5) \times \exp(3) = \exp(3 + 5) = \exp(8)$ ou avec la notation exponentielle : $e^5 e^3 = e^{5+3} = e^8$
- $e^{-4} e^3 e^2 e^{-1} e = e^{-4+3+2+(-1)+1} = e^0 = 1$
- $e^x(e + e^2) = e^x e + e^x e^2 = e^{x+1} + e^{x+2}$

2 – Conséquences de la relation fonctionnelle

Propriété 2 : Pour tous nombres a et b et pour tout entier naturel n , on a les relations suivantes :

- (1) $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ avec la nouvelle notation $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- (2) $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ avec la nouvelle notation $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- (3) $\exp(n \times a) = \exp(a)^n$ avec la nouvelle notation $e^{na} = (e^a)^n$
- (4) $\sqrt{\exp(a)} = \exp\left(\frac{1}{2}a\right)$ avec la nouvelle notation $\sqrt{e^a} = e^{\frac{1}{2}a}$

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

- (1) On a $\exp(a + (-a)) = \exp(0) = 1$ d'où $\exp(a) \times \exp(-a) = 1$ c'est-à-dire $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- (2) On a $\exp(a - b) = \exp(a + (-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- (3) $\exp(n \times a) = \exp\left(\underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-fois}}\right) = \underbrace{\exp(a) \times \dots \times \exp(a)}_{n\text{-fois}} = \exp(a)^n$
- (4) On a $\left(\exp\left(\frac{1}{2}a\right)\right)^2 = \exp\left(2 \times \frac{1}{2}a\right) = \exp(a)$ d'où en appliquant la racine carrée $\exp\left(\frac{1}{2}a\right) = \sqrt{\exp(a)}$.

Exemple 2 : Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{1}{e} = \frac{1}{e^1} = e^{-1}$
- $\frac{e^6 e^7}{e^8} = \frac{e^{6+7}}{e^8} = e^{13-8} = e^5$
- $(e^5)^3 = e^{5 \times 3} = e^{15}$
- $\sqrt{e^{8x}} = e^{\frac{1}{2} \times 8x} = e^{4x}$
- $\frac{1}{(e^{-0.5x})^2} = \frac{1}{e^{2 \times (-0.5)x}} = \frac{1}{e^{-x}} = e^{-(-x)} = e^x$

Remarque : Attention, il n'y a pas de formule pour simplifier les expressions du type $e^a + e^b$ ou $e^a - e^b$.

