

Fiche ____ : Modélisation d'une évolution exponentielle

1 – Modèle discret : Fonction exponentielle et suites géométriques

Propriété 1 :

Démonstration : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = e^{na}$.

- On a $u_0 =$ _____
- Pour tout rang n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$ _____

Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison $q =$ _____.

Remarques :

- Si $a > 0$ alors $q = e^a > 1$ et la suite (u_n) est _____. On parle de **croissance exponentielle**.
- Si $a < 0$ alors $q = e^a < 1$ et la suite (u_n) est _____. On parle de **décroissance exponentielle**.

Exemple 1 :

- La suite $u_n = e^{3n}$ est une suite géométrique de raison $q =$ _____. Cette suite est _____
- La suite $v_n = e^{-n}$ est une suite géométrique de raison $q =$ _____. Cette suite est _____

Propriété 2 :

Remarques :

- Cette propriété justifie le fait que l'on parle **d'évolution exponentielle** pour une suite géométrique.
- La représentation graphique de la suite (u_n) est un nuage de points qui appartiennent à la courbe de la fonction $f(t) = u_0 \times e^{at}$. On passe alors d'un modèle **discret** (la suite) à un modèle **continu** (la fonction).

Exemple 2 : On souhaite modéliser la propagation d'un virus au sein d'une population. On estime à 500 le nombre de contaminés à ce jour dans la population et on considère que chaque jour le nombre cas augmente de 20 %. Pour modéliser l'évolution de l'épidémie on peut utiliser une suite (Figure 1):

- On note C_n le nombre de contaminés après n jour. La suite (C_n) est **géométrique** de 1^{er} terme $u_0 =$ _____, et de raison $q =$ _____
- La formule explicite de cette suite est donc $C_n =$ _____.
- La propriété précédente nous dit qu'il existe un nombre réel a , tel que $C_n = 500 \times e^{an}$. On admet ici que $a \approx 0.1823$.
- Les points de la représentations graphique de (C_n) appartiennent donc à la courbe de la fonction $f(t) = 500 \times e^{0.1823t}$ (Figure 2).

Fig 1 : Modèle discret

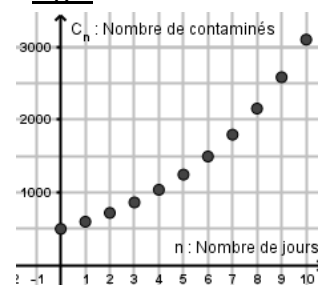
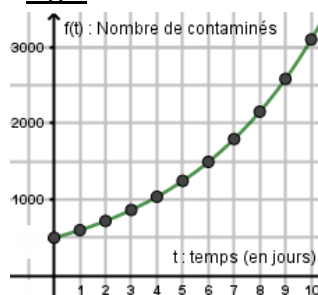


Fig 2 : Modèle continu



2 – Modèle continu : Les fonctions sous la forme $f(t) = e^{kt}$

Propriété 3 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$. Calculer la dérivée f' de f .

Propriété 4 : Soit k un nombre réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$

-
-

Démonstration :

• Commençons par dériver la fonction $f(t) = e^{kt}$: _____

• Si $k > 0$: **Croissance exponentielle**

$$f'(t) = \underbrace{k}_{>0} \times \underbrace{e^{kt}}_{>0} > \text{_____}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$		
$f(t)$		



• Si $k < 0$: **Décroissance exponentielle**

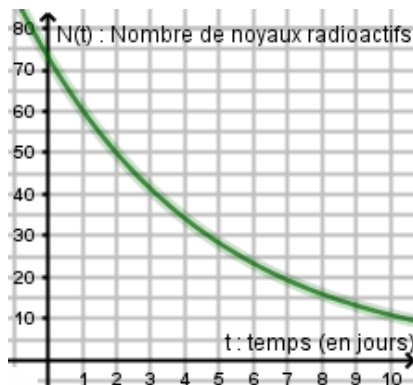
$$f'(t) = \underbrace{k}_{<0} \times \underbrace{e^{kt}}_{>0} < \text{_____}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$		
$f(t)$		



Exemple 4 : Dans un corps radioactif, une population de noyaux radioactifs décroît en suivant la loi de décroissance exponentielle $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ où λ est une constante strictement positive, caractéristique du noyau étudié et N_0 est le nombre de noyaux présents dans le corps radioactif à l'instant $t = 0$.

Pour le radon 222, la valeur de λ est environ égale à 0.19. Ainsi, si $N_0 = 73$, alors le nombre de noyaux présents à l'instant t (en jours) peut être modélisé par la fonction $N(t) = 73e^{-0.19t}$.



On a par exemple, $N(10) = \text{_____}$

Au bout de 10 jours, _____

