

Fiche F4.3 : Modélisation d'une évolution exponentielle

1 – Modèle discret : Fonction exponentielle et suites géométriques

Propriété 1 : Soit a un nombre réel non nul. La suite (u_n) définie pour tout rang $n \geq 0$ par $u_n = \exp(na) = e^{na}$ est une suite **géométrique** de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \exp(a) = e^a$.

Démonstration : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = e^{na}$.

- On a $u_0 = e^{0 \times a} = e^0 = 1$
- Pour tout rang n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^{(n+1)a-na} = e^{(n+1-n)a} = e^a$.

Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^a$.

Remarques :

- Si $a > 0$ alors $q = e^a > 1$ et la suite (u_n) est croissante. On parle de **croissance exponentielle**.
- Si $a < 0$ alors $q = e^a < 1$ et la suite (u_n) est décroissante. On parle de **décroissance exponentielle**.

Exemple 1 :

- La suite $u_n = e^{3n}$ est une suite géométrique de raison $q = e^3$. Cette suite est croissante.
- La suite $v_n = e^{-n}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-1}$. Cette suite est décroissante.

Propriété 2 : Réciproquement si (u_n) est une suite géométrique alors il existe un nombre réel a tel que pour tout rang $n \geq 0$, $u_n = u_0 \times e^{an}$.

Remarques :

- Cette propriété justifie le fait que l'on parle **d'évolution exponentielle** pour une suite géométrique.
- La représentation graphique de la suite (u_n) est un nuage de points qui appartiennent à la courbe de la fonction $f(t) = u_0 \times e^{at}$. On passe alors d'un modèle **discret** (la suite) à un modèle **continu** (la fonction).

Exemple 2 : On souhaite modéliser la propagation d'un virus au sein d'une population. On estime à 500 le nombre de contaminés à ce jour dans la population et on considère que chaque jour le nombre cas augmente de 20 %.

Pour modéliser l'évolution de l'épidémie on peut utiliser une suite (Figure 1):

- On note C_n le nombre de contaminés après n jour. La suite (C_n) est **géométrique** de 1^{er} terme $u_0 = 500$, et de raison $q = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$.
- La formule explicite de cette suite est donc $C_n = u_0 \times q^n = 500 \times 1.2^n$.
- La propriété précédente nous dit qu'il existe un nombre réel a , tel que $C_n = 500 \times e^{an}$. On admet ici que $a \approx 0.1823$.
- Les points de la représentations graphique de (C_n) appartiennent donc à la courbe de la fonction $f(t) = 500 \times e^{0.1823t}$ (Figure 2).

Fig 1 : Modèle discret

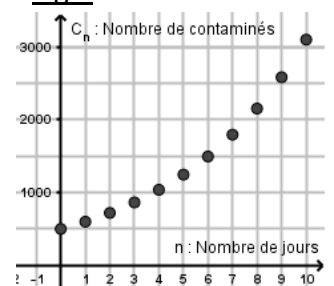
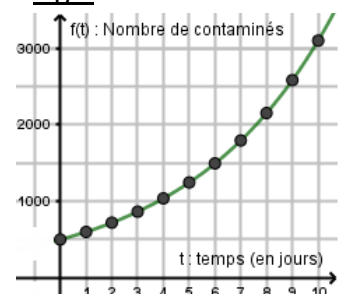


Fig 2 : Modèle continu



2 – Modèle continu : Les fonctions sous la forme $f(t) = e^{kt}$

Propriété 3 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si $f = \exp(u)$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = u' \times \exp(u)$

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$. Calculer la dérivée f' de f .

On a $f = e^u$ avec $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$. On a donc $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$

Propriété 4 : Soit k un nombre réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$

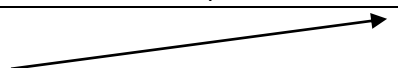
- Si $k > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

• Commençons par dériver la fonction $f(t) = e^{kt}$: $f = e^u$ avec $u = kt$ et $u' = k$. On a donc $f'(t) = ke^{kt}$.

• Si $k > 0$: **Croissance exponentielle**

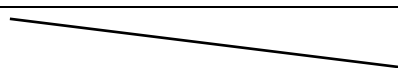
$$f'(t) = \underbrace{k}_{>0} \times \underbrace{e^{kt}}_{>0} > 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$		



• Si $k < 0$: **Décroissance exponentielle**

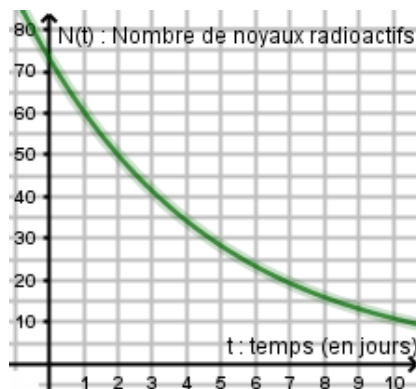
$$f'(t) = \underbrace{k}_{<0} \times \underbrace{e^{kt}}_{>0} < 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$		



Exemple 4 : Dans un corps radioactif, une population de noyaux radioactifs décroît en suivant la loi de décroissance exponentielle $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ où λ est une constante strictement positive, caractéristique du noyau étudié et N_0 est le nombre de noyaux présents dans le corps radioactif à l'instant $t = 0$.

Pour le radon 222, la valeur de λ est environ égale à 0.19. Ainsi, si $N_0 = 73$, alors le nombre de noyaux présents à l'instant t (en jours) peut être modélisé par la fonction $N(t) = 73e^{-0.19t}$.



On a par exemple, $N(10) = 73e^{-0.19 \times 10} = 73e^{-1.9} \approx 11$.

Au bout de 10 jours, il restera environ 11 noyaux radioactifs.

