

Fiche G1.5 : Vecteurs colinéaires

1 – Colinéarité de deux vecteurs

Définition 1 : Deux vecteurs sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction.

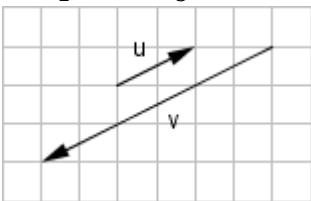
Propriété 1 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre k tel que :

$$\vec{v} = k \times \vec{u}.$$

Remarque : Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Exemple 1 : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

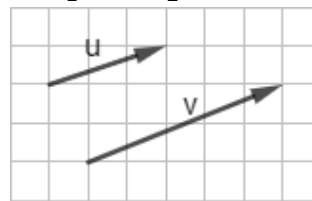
• $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$



$$\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 2 \\ -3 \times 1 \end{pmatrix} = -3 \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

• $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$



$$2 = 2 \times 1 \text{ et } 2 \times 3 = 6 \neq 5$$

Il n'y a donc pas de nombre k tel que $\vec{v} = k \times \vec{u}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2 – Déterminant de deux vecteurs

Définition 2 : On considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$

Remarque : Le déterminant des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est souvent noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Pour le calculer on effectue une sorte de « produit en croix » : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Propriété 2 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Exemple 2 : En utilisant le déterminant déterminer si les vecteurs suivants sont colinéaires.

• $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$: $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

• $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$: $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 9 - 7 \times 7 = 45 - 49 = -4 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Remarque : Si l'un des deux vecteurs est nul alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ car soit $x = y = 0$ soit $x' = y' = 0$.

Démonstration : Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

⇒ • Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel k tel que : $\vec{v} = k \times \vec{u}$.

• On a donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}$ d'où $x' = kx$ et $y' = ky$.

• Calculons le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = x(ky) - (kx)y = 0$

⇐ • Supposons que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 0$ c'est-à-dire $xy' = x'y$ (*)

• Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls l'une au moins des coordonnées de $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est non nul.

• Si $x \neq 0$ on pose $= \frac{x'}{x}$. On a alors $x' = kx$ et d'après (*), on a $y' = \frac{x'}{x}y$ d'où $y' = ky$.

• Si $y \neq 0$ on pose $= \frac{y'}{y}$. On a alors $y' = ky$ et d'après (*), on a $x' = \frac{y'}{y}x$ d'où $x' = kx$.

• Dans les deux cas on obtient que $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix} = k \times \vec{u}$ et donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. □



3 – Déterminant et parallélogramme

Propriété 3 : L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est égale à $|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})|$

Rappel : $|x|$ est la **valeur absolue** de x , c'est-à-dire sa valeur numérique sans tenir compte de son signe.

Exemple 3 : On considère les points $A(-4; -3)$, $B(1; -4)$, $C(3; 2)$ et $D(-2; 3)$.

1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

On doit montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ -4 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux car ils ont les mêmes coordonnées.

Donc $ABCD$ est bien un parallélogramme.

2) Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$

On utilise la propriété précédente : $Aire(ABCD) = |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})|$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - (-4) \\ 3 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - (-1) \times 2 = 30 + 2 = 32$$

$$Aire(ABCD) = |32| = 32 \text{ unités d'aires}$$

