

Fiche P3.1 : Variables aléatoires

1 – La notion de variable aléatoire

Définition 1 : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- Une **variable aléatoire** X est une fonction qui à chaque issue w de Ω associe un unique nombre réel.
- Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X . On appelle **loi de probabilité** de la variable aléatoire X , la donnée de toutes les probabilités $P(X = x_i)$ où x_i prend toutes les valeurs de E .

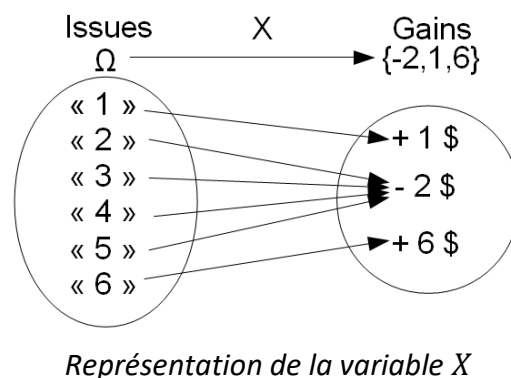
Remarque : On présente souvent la loi de probabilité d'une variable aléatoire sous la forme d'un tableau

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple 1 : On considère le jeu suivant : On lance un dé bien équilibré. Si le dé tombe sur « 1 » alors on gagne 1 \$, si le dé tombe sur « 6 » on gagne 6 \$, sinon on perd 2 \$. Soit X le gain du joueur.

- L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Les valeurs possibles pour X sont $-2, 1$ et 6
- L'événement « $X = -2$ » correspond à l'événement $\{2, 3, 4, 5\}$.
- L'événement « $X \geq 0$ » correspond à l'événement $\{1, 6\}$
- La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	6
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



2 – Espérance d'une variable aléatoire

Définition 2 : On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le nombre, noté $E(X)$, donné par :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Remarque : L'espérance $E(X)$ peut s'interpréter comme la **valeur moyenne** prise par la variable X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple 2 : Calculer l'espérance de la variable aléatoire X définie dans l'Exemple 1 et interpréter le résultat.

On a $E(X) = (-2) \times \frac{4}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \approx -0,16$.

Cela signifie, qu'en moyenne le joueur perdra 0,16€ par partie.

Remarques :

- Lorsque $E(X) = 0$, on dit que le jeu est **équitable**.
- Dans la majorité des jeux de hasard de la vie réelle, (la roulette, le loto, les tickets à gratter, etc) l'espérance du joueur est négatif : Ce que l'on perd en moyenne correspond à ce que gagne l'organisateur du jeu.

