

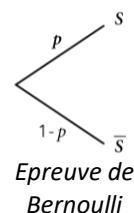
Fiche P3.2 : Loi binomiale

1 – Schéma de Bernoulli et loi binomiale

- **Epreuve de Bernoulli** : Expérience aléatoire à deux issues : **Succès** noté S et **Echec** noté $\bar{S}$.

On note p la probabilité du succès et q celle de l'échec : $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = q = 1 - p$.

- **Schéma de Bernoulli** : On répète n fois cette épreuve de façon **identique** et **indépendante**.



Définition 1 : Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli.

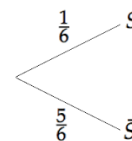
On dit alors que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Exemple 1 : On lance un dé bien équilibré et on considère comme « succès » le fait d'obtenir un « 6 ».

Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

On a pour succès $S =$ « Obtenir un 6 » et pour echec $\bar{S} =$ « Ne pas obtenir un 6 ».

La probabilité du succès est $P(S) = \frac{1}{6}$. La probabilité de l'échec est $P(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.



Exemple 2 : On lance 3 fois de suite un dé bien équilibré. Soit X le nombre de « 6 » obtenus sur les 3 lancers.

- 1) Justifier que cette expérience est un schéma de Bernoulli.

On a $n = 3$ et chaque lancer est indépendant des autres.

- 2) Quelle est la loi suivie par la variable X ?

X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$:

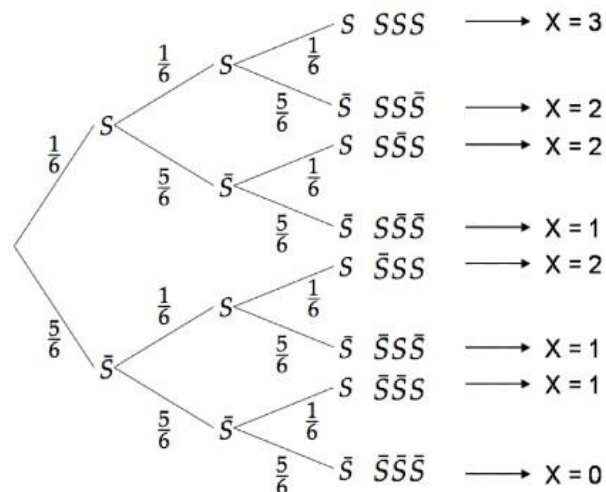
$$X \sim \mathcal{B}(3; \frac{1}{6})$$

- 3) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

Les valeurs possibles pour X sont 0, 1, 2 et 3.

- 4) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

- 5) A l'aide de l'arbre, calculer la loi de X



- $P(X = 3) = P(SSS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0.004.$

- $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(\bar{S}SS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216} \approx 0.069.$

- $P(X = 1) = P(S\bar{S}\bar{S}) + P(\bar{S}\bar{S}S) + P(\bar{S}S\bar{S}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \approx 0.347.$

- $P(X = 0) = P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \approx 0.578.$

k	0	1	2	3	Total
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	1



2 – Coefficients binomiaux

Définition 2 : Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ (avec $0 \leq k \leq n$) est le nombre de chemins qui mènent à k succès pour n répétitions dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli.

Exemple 3 : D'après l'arbre précédent on peut affirmer : $\binom{3}{0} = 1$; $\binom{3}{1} = 3$; $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$

Triangle de Pascal : En pratique, on utilise le triangle de Pascal pour déterminer les $\binom{n}{k}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

- Comme $k \leq n$, seule la partie inférieure du tableau est complétée.

- Chaque nombre du triangle s'obtient en additionnant deux nombres de la ligne précédente : Celui du dessus avec celui de la colonne précédente.

Exemple 4 : On peut lire par exemple que : $\binom{2}{0} = 1$; $\binom{4}{1} = 4$; $\binom{4}{3} = 4$; $\binom{5}{2} = 10$

Propriété 1 : Soit n un entier naturel et k un entier naturel tel que $k \leq n - 1$

- On a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

- On a $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

- **Formule de Pascal :** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3 – Propriétés de la loi binomiale

Propriété 2 : Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors pour tout k compris entre 0 et n on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p$$

Remarque : On pourra retenir plutôt le principe suivant : $P(X = k) = \overbrace{\binom{n}{k}}^{\text{Nombre de chemins}} \times \overbrace{p^k}^{\text{Nombre de succès}} \times \overbrace{q^{n-k}}^{\text{Nombre d'échec}}$

Exemple 5 : On lance 5 fois un dé bien équilibré. Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois « 6 ».

Soit X le nombre de « 6 » obtenus lors des 5 lancers alors X suit la loi binomiale : On a $X \sim B(5; \frac{1}{6})$.

Pour obtenir exactement 3 fois la face « 6 », on doit avoir 3 succès et 2 échecs.

Le triangle de Pascal nous permet de déterminer le nombre de chemin menant vers 3 succès : $\binom{5}{3} = 10$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36} = \frac{250}{7776} = \frac{125}{3888} \approx 0.032 \text{ soit environ } 3.2\%$$

Propriété 3 : Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors $E(X) = n \times p$.

Exemple 6 : Quel est le nombre moyen de « 6 » sur 5 lancers ?

Le nombre moyen est donné par l'espérance de la variable X définie dans l'exemple précédent.

Comme $X \sim B\left(5; \frac{1}{6}\right)$ on a $E(X) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0.83$. On obtient en moyenne 0.83 fois « 6 » sur 5 lancers.

