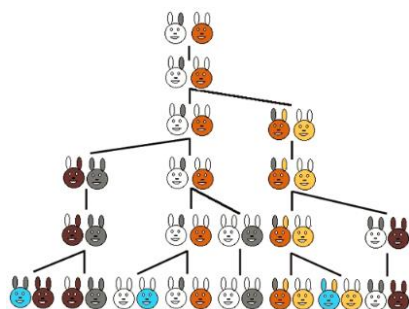


## Problème : Suite de Fibonacci et Nombre d'or



La suite de Fibonacci doit son nom à Leonardo Fibonacci qui, dans un problème récréatif posé dans l'ouvrage *Liber abaci* publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins vérifiant ces hypothèses :

- Au début du premier mois, il y a un seul couple de lapin.
- Les lapins ne peuvent procréer qu'à l'âge de deux mois.
- Chaque début de mois, chaque couple en capacité de procréer engendre exactement un nouveau couple de lapins.
- Les lapins ne meurent pas.

Sous ses hypothèses, chaque couple de lapin engendre donc tous les mois, un nouveau couple de lapins dès qu'il a atteint l'âge de 2 mois.

## Partie A – Suite de Fibonacci

On suppose qu'une population de lapin suit la progression décrite par Fibonacci.

On note  $u_n$  le nombre de couples de lapins dans l'enclos au bout du  $n^{\text{ème}}$  mois.

- 1) Déterminer  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ .
- 2) L'algorithme ci-contre, permet de calculer le nombre de couples de lapins présents dans l'enclos lors des dix premiers mois. Exécuter à la main cet algorithme puis compléter le tableau suivant :

[illegible]

- 3)
  - a. Comment peut-on facilement obtenir un terme en utilisant les précédents ?
  - b. En déduire l'expression de  $u_{n+2}$  en fonction de  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .
  - c. Combien de couples de lapins y'aura-t-il dans l'enclos au bout d'un an ?
- 4)
  - a. Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$  ?
  - b. Déterminer combien de mois faudra-t-il attendre pour qu'il y'ait plus de 1000 couples de lapins dans l'enclos ?

```

u ← 1
Afficher u
v ← 1
Afficher v
Pour i allant de 2 à 10
    w ← u + v
    Afficher w
    u ← v
    v ← w
Fin Pour

```

```
from math import*
u=1
print(u)
v=1
for k in range(2,11):
    w=u+v
    print(w)
    u=v
    v=w
```

## Partie B – Le nombre d'or



Le nombre d'or est le nombre la valeur exacte est  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Ce nombre apparaît dans de nombreuses œuvres artistiques car il est considéré par certains artistes comme étant une proportion idéale. Ainsi, par exemple, les dimensions de *La Naissance de Vénus* de Sandro Botticelli respectent celle de la proportion dorée : Si l'on effectue le rapport de la longueur du tableau par sa largeur, on trouve (à peu près) le nombre d'or.

- 1) Donner une approximation du nombre d'or à  $10^{-5}$  près.
- 2) On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel par  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

Calculer les 10 premiers termes de la suite  $(v_n)$ . (On arrondira à  $10^{-5}$  près)

[illegible]

- 3) Conjecturer la limite de la suite  $(v_n)$ .
- 4) A partir de quel rang les termes de la suite  $(v_n)$  sont tous situés à une distance inférieure à  $10^{-3}$  de  $\varphi$  ?
- 5) On considère la suite  $(w_n)$  définie par  $w_0 = 0.5$  et  $w_{n+1} = \frac{1+w_n}{w_n}$ .

Calculer les premiers termes de la suite, puis à l'aide d'un programme, du tableur ou de la calculatrice conjecturer sa limite.