

Chapitre S1 : Suites arithmétiques

0 – Rappels sur les suites numériques

Définition : Une suite (u_n) est une liste indexée de nombres réels.

Exemple (Suite de Fibonacci) : $(u_n) = (1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; \dots ; \dots ; \text{etc})$

Rang	0	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$	n	$n+1$	...
Terme	1	1	2	3	5	8	13	...	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}	...
	1 ^{er} terme noté u_0				Terme de rang 5 Il est noté u_5				Terme précédent	Terme de rang n	Terme suivant	

1 – Généralités

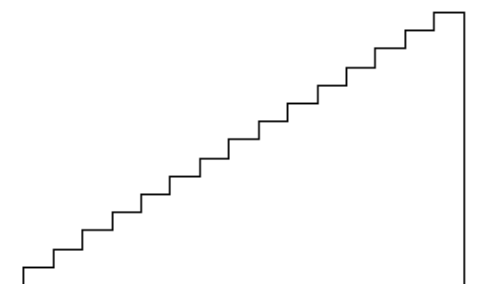
Activité 1 : (Escalier)

Bob monte un escalier de 15 marches de la façon suivante :

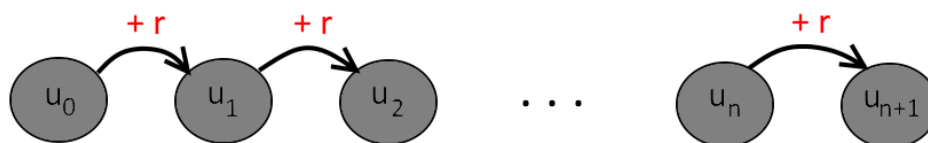
Il part de la 2^{ème} marche et monte les marches de 3 en 3.

On note p_n sa position dans l'escalier au bout du $n^{\text{ème}}$ pas.

- 1) Ecrire la suite (p_n)
- 2) Quelle est la relation entre un terme et le terme suivant ?
- 3) Au bout de combien de pas aura-t-il monté l'escalier ?
- 4) Reprendre les trois questions précédentes en partant de la dernière marche et en descendant de 5 en 5.



Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison r** si pour tout rang n , on a $u_{n+1} = u_n + r$



Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r , appelé la raison

Exemple 1 :

$u_0 = 1$ et $r = 2$.

Formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 2$

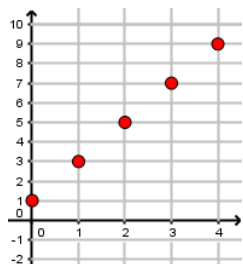
$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 5$$

$$u_3 = 7$$

$$u_4 = 9$$

$$u_5 = 11$$



$v_0 = 10$ et $r = -3$

Formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n - 3$

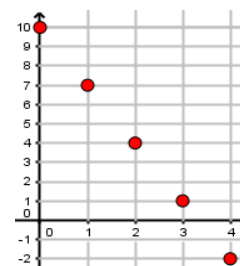
$$v_1 = 7$$

$$v_2 = 4$$

$$v_3 = 1$$

$$v_4 = -2$$

$$v_5 = -5$$



Propriété 1 : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r .

- Les points de sa représentation graphique sont **alignés**.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est **croissante**.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est **décroissante**.



2 – Formule explicite

La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans calculer tous les précédents.

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout rang n , on a $u_n = u_0 + nr$

Remarque : Lorsque le premier terme est u_1 on utilise la formule $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Exemple 2 :

$u_0 = 1$ et $r = 2$.	$v_1 = -7$ et $r = 3$
- Formule explicite : $u_n = 1 + n \times 2$ $= 2n + 1$ - Calcul de u_{150} : $u_{150} = 2 \times 150 + 1 = 301$	- Formule explicite : $v_n = -7 + (n - 1) \times 3$ $= 3n - 10$ - Calcul de v_{200} : $v_{200} = 3 \times 200 - 10 = 590$

3 – Application : Suites arithmétiques & Evolution

Lorsqu'une quantité subit une évolution linéaire alors on peut modéliser mathématiquement l'évolution de cette quantité par une suite arithmétique.

Exemple 3 : Entraînement sportif (Exercice type bac)

Un athlète commence par courir 3000 m, puis chaque jour, il parcourt 150 m de plus que la veille.

On note u_n la distance parcourue le n^e jour d'entraînement. Ainsi $u_1 = 3000$

- Déterminer u_2 et u_3 : $u_2 = 3000 + 150 = 3150$ et $u_3 = 3150 + 150 = 3300$
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera le premier terme et la raison.

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 150$ et de 1^{er} terme $u_0 = 3000$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n : $u_{n+1} = u_n + 150$
- Donner le sens de variation de la suite (u_n) : La suite est croissante car $r > 0$
- Exprimer u_n en fonction de n .

$$u_n = 3000 + (n - 1) \times 150 = 3000 + 150n - 150 = 150n + 2850$$

- Quelle distance devra-t-il parcourir après une semaine d'entraînement ?

$$u_8 = 150 \times 8 + 2850 = 4050 \text{ m}$$

- a. Compléter l'algorithme (voir Fig 1) afin qu'il affiche la distance totale parcourue après 10 jours d'entraînement.

b. A l'aide de la calculatrice déterminer la valeur affichée par l'algorithme

Après programmation de l'algorithme (voir Fig 1) on trouve $total = 33750$

- a. Que peut-on saisir en B3 pour afficher, par recopie par le bas, la distance à parcourir sur les 10 premiers jours d'entraînement (voir Fig 2) ?

$$= B2 + 150 \text{ ou } = 3000 + 150 * A3$$

b. Proposer une formule à entrer en B13 pour afficher, la distance totale

parcourue après 10 jours d'entraînements (voir Fig 2) : $= SOMME(B2: B11)$

Figure 1 : Algorithme

```
Variables : dist, total
dist ← 3000
total ← 3000
Pour i allant de 2 à 10 Faire
    dist ← dist + 150
    total ← total + dist
Fin Pour
Afficher total
```

Programme CASIO

```
=====ENTRAINE=====
3000→U
0→S
For 2→I To 10
U+150→U
S+U→S
Next I
S
```

Programme TI

```
PROGRAM:ENTRAINE
3000→U
0→S
For(I,2,10)
U+150→U
S+U→S
End
Disp S
```

Figure 2 : Feuille de calcul

	A	B
1	Après n jours d'entraînement	Distance A parcourir (en m)
2	1	3000
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
10	9	
11	10	
12	Distance totale Parcourue (en m)	



Suites arithmétiques – Fiche d'exercices

Ex 1 Ecrire les suites arithmétiques suivantes :

- Premier terme : $u_0 = 0$; Raison : $r = 5$
- Premier terme : $u_0 = -1$; Raison : $r = 10$
- Premier terme : $u_0 = 1$; Raison : $r = 0.1$
- Premier terme : $u_0 = 1$; Raison : $r = -4$

Ex 2 Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, déterminer la raison.

- $(u_n) = (1; 5; 9; 13; 17; 21; \dots)$
- $(v_n) = (-10; -21; -32; -43; -54 \dots)$
- $(w_n) = (33; 44; 55; 66; 88; \dots)$
- $(x_n) = (\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4}; \frac{5}{4}; \dots)$

Ex 3 Soit (u_n) la suite arithmétique de 1^{er} terme $u_0 = 4$ et de raison $r = -3$

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
- Calculer u_1, u_2 et u_3
- Représenter la suite dans un repère. Que remarque-t-on ?
- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
- Exprimer u_n en fonction de n
- En déduire la valeur de u_{150}

Ex 4 Un chauffeur de taxi propose les tarifs suivants :

« Prise en charge 5€ ; Tarif au km 1,50€ »

On cherche à modéliser le prix de la course en fonction du nombre de kilomètre parcouru.

- Modéliser cette situation avec une suite arithmétique (u_n)
- Exprimer (u_n) en fonction de n .
- Quel est le prix de la course pour 10 km parcouru ?
- Combien peut-on parcourir de kilomètre au maximum avec 15€ ?

Ex 5 QCM (Tiré du Bac 2015 – Polynésie)

La suite (V_n) est arithmétique de premier terme $V_0 = 0$ et de raison $r = 5$ alors la somme $V_0 + V_1 + \dots + V_{10}$ est égale à :

- a. 0 b. 50 c. 250 d. 275

Ex 6 Espérance de vie (Tiré du Bac 2014 – Polynésie – Session de remplacement)

D'après l'INSEE, l'espérance de vie à la naissance est passée pour les hommes de 59,9 ans en 1946 à 78,5 ans en 2012. Pour les femmes, elle est passée de 65,2 ans à 84,9 ans durant la même période.

On se propose ici de modéliser l'évolution de l'espérance de vie pour les hommes par la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 59,9$ et de raison $r = 0,25$.

- Calculer U_1, U_2 et U_3 qui correspondent aux années 1947, 1948 et 1949.
- Donner U_n en fonction de n .
- Déterminer U_{66} .
- Entre 1946 et 2012 les hommes ont-ils gagné, en réalité, plus de 3 mois d'espérance de vie chaque année en moyenne ?

Ex 7 Entraînement de cyclisme (Tiré du Bac 2015 – Pondichery)

Ugo, coureur cycliste, a programmé un entraînement hebdomadaire afin de préparer une course qui aura lieu dans quelques mois. Son objectif est de parcourir une distance totale de 1500 km pendant sa période d'entraînement de 20 semaines. Ugo commence son entraînement en parcourant 40 km la première semaine et prévoit d'augmenter cette distance de 5 km par semaine.

On note u_n la distance en kilomètre parcourue par Ugo la première semaine.

Ainsi on a $u_1 = 40$

- Calculer les distances parcourues par Ugo au cours des deuxième et troisième semaines d'entraînement.
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
- Recopier l'algorithme ci-dessous et en compléter les lignes (1) et (2) de façon à ce qu'il affiche en sortie la distance parcourue par Ugo lors de la n -ième semaine d'entraînement.

```

Variables :   u est un réel
              i et n sont des entiers naturels

Entrée :      Saisir n

Initialisation : u prend la valeur..... (1)

Traitement :  Pour i allant de 1 à n
              u prend la valeur..... (2)
              Fin Pour

Sortie :      Afficher u
    
```

4) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 35 + 5n$.

5) A la fin de la 17^e semaine Ugo se blesse et réduit son entraînement. Il ne fera plus que 80 km par semaine à partir de la 18^e semaine. Son objectif sera-t-il atteint ?



Ex 8 Pêche de cabillaud (Tiré du Bac 2017 – Métropole)

Les autorités locales décident de limiter la pêche pour cette espèce. On suppose que hors pêche, le stock reste constant à 5 000 tonnes.

On note u_n la quantité maximale (ou quota), en tonne, de cabillaud pouvant être pêchée sur ces côtes l'année $2015 + n$, avec n entier naturel. On a ainsi $u_0 = 600$.

Les autorités locales décident de baisser chaque année le quota de pêche de cabillaud de 30 tonnes.

1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner sa raison et son premier terme.
b) Exprimer u_n en fonction de n .
c) Calculer u_{10} . Interpréter ce résultat dans le contexte étudié.
2. Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul, donne les valeurs de la suite (u_n) et la quantité totale de cabillaud pêchée à partir de l'année 2015.
 - a) Quelle formule, destinée à être copiée vers le bas, faut-il saisir en B3 afin d'obtenir les termes de la suite (u_n) ?
 - b) Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3 afin d'obtenir, par recopie vers le bas, la quantité totale de cabillaud pêchée depuis 2015 ?

	A	B	C
1	n	Quota annuel (en tonne) : u_n	Quantité totale de cabillaud pêchée depuis 2015 (en tonne)
2	0	600	600
3	1	570	1170
4	2	540	1710
5	3	510	2220
6	4	480	2700
7	5	450	3150
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

3. a) Calculer la quantité totale de cabillaud pêchée entre 2015 et 2025.
b) La réglementation adoptée permet-elle d'éviter à long terme la disparition du cabillaud des côtes des communes littorales concernées ? Justifier la réponse.

